REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE

Mémoire de fin de cycle en vue de l'obtention du diplôme de Master en Sciences financière et comptabilité

Spécialité : FINANCE D'ENTREPRISE

THEME :

L'adéquation de la modélisation gaussienne avec la réalité observée en finance

Cas d'entreprise INERGA

Elaboré par :

DAMOU TAREK

Encadreur :

professeur : THABET Mohamed Nasser

Lieu de stage : INERGA filiale sonelgaz

Période de stage : de 4 avril au 26 mai

2013/2014

Remerciements :

Je suis heureux de pouvoir exprimer toute ma reconnaissance à mon professeur et directeur de mémoire, Mr THABET Mohamed Nasser, pour avoir patiemment dirigé mes recherches durant toute une année. Sa disponibilité, ses encouragements et son soutien moral sans réserve.

Je remercie infiniment les professeurs jury de ma soutenance pour s’être intéressés à ce travail.

Je remercie particulièrement mon encadreur de stage pratique le chef de service planification, Mr CHALABI Fares, ainsi que tous les employés de l’entreprise INERGA, pour les moyens mis à ma disposition.

Je remercie aussi tous ceux et celle qui m’ont soutenu de près ou de loin dans l’élaboration de ce mémoire.

Dédicaces :

Je dédie ce mémoire de master,

À ma mère, espérant avoir réalisé l'un de ses vœux les plus chères, celui de voir son fils ainé accéder à un grade important couronnant des études avancées. Ses encouragement constants, m'ont aidé à persévérer et m'ont été d'une aide morale très précieuse, c'est vraiment à elle que je dois ma réussite dans les études, j'espère de tout cœur qu'elle en sera fière.

À mon père, qui m'as toujours aidé chaque fois que je l'ai sollicité et qui a constamment été à mes côtés, son seul vœu est de voir la réussite de son fils, je t'aime papa.

À mes sœurs, Asmaà, Safaà, Fairouz, en priant Dieu de les aider à persévérer dans la vie et les protéger.

À la mémoire de ma grand-mère Fouitma, une femme exceptionnelle, tolérante et adorable. A mes grands-pères Omar et Lounes, à ma grand-mère Yamina.

À mes oncles et tantes, à mes cousins et cousines et toute ma grande famille, grâce à eux que j'ai pu continuer mon travail.

A mes amis et collègues et tous ceux qui m'aiment.

A mes professeurs, qui m'ont tout appris.

PLAN

INTRODUCTION……………………………………………………………...7

CHAPITRE I : LE MODELE GAUSSIEN………………………………………10

SECTION I : LA NAISSANCE DU MODELE…………………………………..10

1- la courbe de Carl Friedrich Gausse……………………………………………10

2- l'efficience des marchés……………………………………………………….14

3-la théorie du portefeuille……………………………………………………….18

3-1 portefeuille constitué de deux titres…………………………………………22

3-2 portefeuille constitué de N titres ……………………………………………23

4- le modèle d'évaluation des actifs financiers…………………………………..24

4-1 les hypothèses du modèle……………………………………………………24

4-2 le portefeuille du marché……………………………………………………25

4-3 béta et prime de risque………………………………………………………25

4-4 interprétation du béta…………………………………………………………26

5- le modèle d'évaluation des options ……………………………………………29

5-1 la notion d'option……………………………………………………………29

5-2 la formule de Black & Scholes………………………………………………..31

6- le modèle de Modigliani & Miller……………………………………………..34

SECTION II : LES FAIBLESSES DU MODELE………………………………..39

1- les hypothèses rassurantes du modèle…………………………………………39

1-1 l'hypothèse de l'indépendance………………………………………………..39

1-2 la concentration autour de la moyenne………………………………………40

2- les hypothèses imposées à la modélisation financière…………………………43

2-1 la rationalité des agents………………………………………………………..43

2-2 l'efficience des marchés ……………………………………………………43

Conclusion…………………………………………………………………………..44

CHAPITRE II : LA MODELISATION DES PHENOMENES EN FINANCE...45

SECTION I : MOUVEMENTS BROWNIENS…………………………………....45

1- processus stochastiques et variables aléatoires…………………………………45

2- le mouvement brownien simple…………………………………………………46

3- le mouvement brownien avec drift………………………………………………49

4- processus d'ITO……………………………………………………………………..51

4-1 le mouvement brownien géométrique………………………………………53

4-1-1 propriété fondamental du brownien géométrique……………………..53

4-1-2 espérance et variance du brownien géométrique………………………55

4-1-3 exemple d'application d'un brownien géométrique…………………..55

4-1-4 détermination de α…………………………………………………………...56

4-1-5 détermination de σ…………………………………………………………...57

SECTION II : VERS UN NOUVEAU MODELE…………………………………..58

1- qu'est-ce qu'une fractale ?...58

1-1 les fractales dans la nature………………………………………………….58

1-2 les fractales en finance……………………………………………………….58

2- la dimension fractale…………………………………………………………………..60

3- la dimension fractale et l'exposant de Hurst…………………………………….62

4- l'aspect théorique de la statistique R/S et l'exposant de Hurst………………..63

Conclusion…………………………………………………………………………..64

CHAPITRE III : ETUDE DE CAS ET SIMULATION DES PROCESSUS…….65

SECTION I : PRESENTATION DE L'ORGANISME D'ACCUEIL……………65

1- présentation de l'entreprise INERGA………………………………………..65

1-1 historique……………………………………………………………………………..65

1-2 présentation……………………………………………………………………..66

1-3 domaine d'activité de l'entreprise……………………………………..67

1-4 les valeurs de l'entreprise…………………………………………………67

1-5 les qualités de l'entreprise………………………………………………...68

1-6 formation continue……………………………………………………….....70

1-7 ressources humaines………………………………………………………71

1-8 moyens matériels……………………………………………………………72

2- présentation de l'unité objet de stage……………………………………73

2-1 la mission de l'unité Rouiba………………………………………………73

2-2 les moyens de l'unité Rouiba……………………………………………..74

2-2-1 les moyens matériels…………………………………………………74

2-2-2 les moyens humains …………………………………………………75

3- présentation du service objet de stage…………………………………...76

4- importance de la recherche pour la mission du service…………………76

SECTION II : SIMULATION ET RESULTATS…………………………………..77

1- démarche de la recherche………………………………………………………..77

2- simulation par un brownien géométrique et analyse des résultats……………..78

3- vers un champ fractal………………………………………………………………81

3-1 la dépendance et la discontinuité……………………………………………82

3-2 la fractalité et l'invariance d'échelle………………………………………….84

CONCLUSION GENERALE…………………………………………………………..88

BIBLIOGRAPHIE……………………………………………………………………89

LISTING………………………………………………………………………………91

ANNEXES……………………………………………………………………………..92

INTRODUCTION

Le krach boursier de septembre 2008 qui a fait suite à la crise des sub-primes et a provoqué, dans la majorité des pays industrialisés, une crise économique dont il faut rechercher un précédent au début des années trente.

Le krach de 2008 avait une chance sur un billion de se produire : autant dire que sa probabilité était nulle… elle a pourtant bien eu lieu.

Le risque est, par nature, intrinsèquement lié à l'incertitude et, dans un contexte d'incertitude, rien n'est plus rassurant qu'une modélisation mathématique toujours plus complexe. Les spéculateurs ont néanmoins oublié une chose essentielle : le principe de la thermodynamique ou principe d'entropie en vertu duquel tout système clos qui tend à se complexifier consomme toujours davantage d'énergie, ce qui le conduit inévitablement à son anéantissement.

Dès 1961, Mandelbrot[1] (le créateur des fractales) lançait un pavé dans la mare financière : les modèles alors en usage étaient particulièrement inefficaces en raison de leur inadéquation à la réalité. A l'époque tout le monde a bien ri et ce pauvre Mandelbrot, incompris, a abandonné ses recherches en finance pour se consacrer à la physique. Il a pourtant refait surface en 2004 avec un livre retentissant «The (Mis)behaviour of Markets» dans lequel il met, une nouvelle fois en garde les spéculateurs

[1] Benoit Mandelbrot. Mathématicien franco-américain (1929-2010)

qui recourent à des modèles mathématiques inappropriés. Son livre était prophétique puisque, moins de quatre années plus tard, les marchés financiers connaissaient une débâcle particulièrement lourde de conséquences pour l'économie globale et les finances publiques de nombreux pays industrialisés.

Depuis plusieurs décennies pourtant de nombreux théoriciens de la finance ont pris en compte les mises en garde du mathématicien et sont mis en quête de nouvelles approches. On distinguera, parmi ceux-là, ceux qui se contentent d'amender les modèles incriminés et ceux qui, remettant en cause les fondements mêmes de ces modèles, cherchent d'autres voies.

Tout ce qui vient d'être dit, m'a poussé à poser la problématique suivante :

L'approche Gaussienne, est-elle un moyen fiable pour la modélisation des phénomènes de la finance ?

Cet ordre d'interrogation s'assortis d'une double hypothèse tel que suit :

- Les fluctuations financières présentent un caractère souvent discontinu.
- Les variables des série financières présentent une forte dépendance temporelle entre-elles.

Voici donc comment je me propose de répondre à ce questionnement, en vue de résoudre cette problématique et ainsi, vérifier cette double hypothèse.

Le premier chapitre est composé de deux sections, dans la première, j’exposerai la naissance du modèle normal ainsi que les théories développé à partir de la courbe en cloche, dans la seconde, je définirai les limites du modèle.

Le deuxième chapitre est aussi composé de deux sections, dans la première, je tenterai de présenter des processus stochastiques adoptant une approche normale, dans la deuxième section, à partir des limites du modèle et les hypothèses de la recherche, et en se basant principalement sur les travaux de Mandelbrot, j’essayerai de décrire une nouvelle approche.

Le troisième chapitre présentera les résultats de mon étude, dans la première section, je présenterai l’organisme d’accueil, dans la deuxième, je procèderai à la vérification des hypothèses et la résolution de la problématique de la recherche.

CHAPITRE I : LE MODELE GAUSSIEN.

Ce premier chapitre portera sur deux points :

- Le premier illustrera l'approche normale de la modélisation en finance, en mettant l'accent sur la place importante qu'occupe la loi de Gausse au sein du paradigme de la finance, cela en présentant les différentes théories qui se base sur ce modèle.
- Le deuxième tente à décrire les limites du modèle Gaussien appliqué à la finance, principalement en comparant les hypothèses de ce dernier avec la réalité observée

SECTION I : LA NAISSANCE DU MODELE :

1- La courbe de Carl Friedrich Gauss :

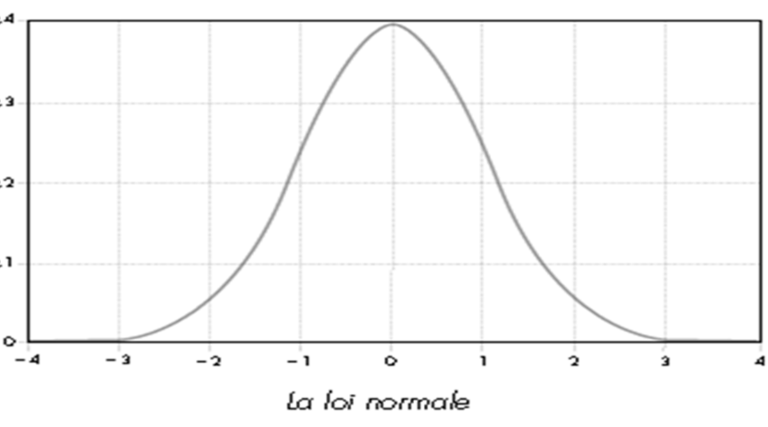
« A l'origine, la courbe de Gauss était destinée à mesurer les erreurs en astronomie»[2]. Voilà qui nous invite à faire un petit retour historique sur la naissance de cette fameuse courbe avec notamment la très pertinente étude de Bernard Bru.

Au 19eme siècle, le développement de l'astronomie est confronté au problème de l'approximation des mesures due à la qualité moyenne des optiques. On n'obtenait pas une position précise pour une étoile, mais plutôt un nuage de points établis par les différents astronomes, la procédure retenue fut la méthode des moindres carrés permettant de calculer la position qui minimise les erreurs de mesure, dont l'Allemand

[2] .Nassim Nicholas Taleb, *le cygne noir,* Belles Lettres, 2008.

Gauss et le Français Legendre se disputèrent d'ailleurs la paternité. Mais finalement, « *Gauss observe que la courbe qui ne s'appelle pas encore de Gausse, rend la méthode des moindres carrés entièrement cohérente et qu'elle est essentiellement la seule »*[3]. C'est comment est née « la courbe de Gauss », pour valider une méthode de réduction des erreurs de mesure.

Afin de mieux comprendre, considérant le jeu consistant à effectuer 100 lancers de pièce, on gagne un dinar si la pièce tombe sur face et on perd un dinar dans le cas contraire. Répétons cette partie plusieurs fois, en remettant le compte à zéro avant de recommencer, avec ce jeu on obtiendra la plupart du temps une cagnotte vide (la moyenne de ce jeu est zéro, du fait que la probabilité de tomber sur pile ou face est équiprobable), on obtiendra à plusieurs reprise une cagnotte se situant juste à proximité de cette moyenne (+1 dinar, -1 dinar), mais on aura parfois des gains ou des déficits de 5,7,9…ce qui sera plus rare au fur et à mesure que ce chiffre augmente. En reportant les cagnottes sur un graphique, on obtient une courbe sous forme de cloche :



-figure 1-

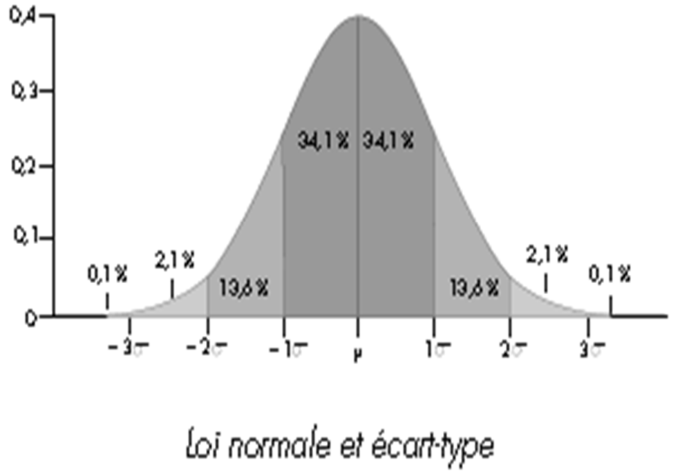
[3] . Bernard Bru, *La courbe de Gauss ou le théorème de Bernoulli raconté aux enfants,* MSH, 2006

La plupart des cagnottes se situent autour de zéro et quelques gains ou pertes exceptionnels se trouvent sur les côtés. C'est la courbe de Gauss, découverte par Carl Friedrich Gauss (1777-1855), autrement appelée « loi normale » ou « courbe en cloche ».

Nous sommes ici en présence d'une loi fondamentale que l'on retrouve dans de nombreuse disciplines, partout où les probabilités sont utilisées comme la physique, la biologie, la sociologie, et précisément la finance, voici la formule de la loi normale (de moyenne μ=0 et écart type σ=1)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Cette fonction à la formulation complexe ne nécessite que deux nombres pour la caractériser : la moyenne et l'écart type, ce dernier mesure la dispersion des valeurs autour de la moyenne, tel que : 68,2% des valeurs sont comprises entre plus ou moins 1 écart type, 95,4% entre plus ou moins 2 écarts types, 99,6% entre plus ou moins 3 écarts types, etc. On peut le voir dans le graphique suivant :



-figure 2-

Mais il faut bien comprendre que la courbe de Gausse s'applique à des variables dites « i.i.d », indépendantes et identiquement distribuées, c'est-à-dire :

- ⇨ Indépendantes : les valeurs sont indépendantes les unes des autres, sortir 3 cotés piles à la suite ne va pas augmenter la probabilité de tomber de nouveau sur le côté pile au quatrième lancer.
- ⇨ Identiquement distribuées : les valeurs obtenues résultent toutes de la même loi de probabilité, ici du lancer d'une pièce avec une probabilité identique de tomber sur pile ou face.

De là, on déduit « le théorème central limite », une autre notion statistique disant que toute somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées tend vers une variable gaussienne. Formulé autrement, on peut dire que tous les phénomènes résultant de l'addition de petites causes fortuites et peu dépendantes les unes des autres seront du type gaussien.

La courbe de cloche connut un succès foudroyant, un succès qui est conséquence directe du théorème centrale limite, c'est-à-dire qu'elle s'applique à des variables (iid), mais l'application de la loi normale à la finance est loin de simuler la réalité.

2- L'efficience des marchés :

La notion d'efficience des marchés, découverte par Eugene Fama au début des années 1960, joue un rôle essentiel dans le modèle classique de la finance. En effet, si toute la théorie qui va s'édifier par la suite se base sur les prix des actifs et leur évolution, il faut être certain que ceux-ci représentent bien la réalité du marché, qu'ils synthétisent toute l'information existante. Si les prix ne sont qu'une simple indication et que les opérateurs s'entendent entre eux pour échanger leurs actions, un modèle basé sur les prix ne pourra être que bancal.

Fama affirme qu'aucun risque qu'une telle chose se produise, car les marchés son efficients, c'est-à-dire qu'ils incorporent à chaque instant toute l'information disponible.

Cela a une conséquence importante : on ne peut jamais gagner contre le marché. A partir du moment où une information est correctement intégrée dans le prix, elle ne peut être utilisée pour réaliser un profit anormal, c'est-à-dire acheter un actif sous-coté ou vendre un actif surcoté , si une entreprise décroche un contrat important susceptible de doubler ses bénéfices annuels, le cours de son action monte instantanément au niveau intégrant cette information, de telle façon qu'ensuite il n'y a plus d'intérêt à acheter cette action en espérant qu'elle monte puisque c'est déjà fait.

Autrement dit, l’espérance mathématique du spéculateur est nulle, ce dernier peut gagner par moments, mais il perdra par autres, et sur la durée, son espérance de gain sera autour de l’équilibre. Si un chartiste pense avoir détecté une tendance, ou si un analyste financier est persuadé d’avoir mis à jour une information importante, la théorie de l’efficience nous dit que, de toute façon, d’autre personnes informées auront déjà repéré ces éléments et l’auront traduit dans les cours.

Concurrence et marchés efficients :

Le fait que les prix reflètent et synthétisent les informations détenues par une multitude d’investisseurs est une conséquence logique de la concurrence qui existe entre les investisseurs.

En achetant et en vendant les actions, les investisseurs révèlent leur opinion sur les titres, et donc, implicitement, les informations dont ils disposent. Ces achats et ces ventes font changer le prix de marché de chaque titre.

Si les investisseurs sont nombreux à penser, pour une raison ou pour une autre, que l’entreprise est sous-évaluée, ils achèteront en masse ses actions, ce qui fera augmenter leur prix ; et inversement en cas de surévaluation.

Tout le paradigme repose sur l’information, si une nouvelle information susceptible d’influencer la valeur de l’entreprise est portée à la connaissance des investisseurs, son degré d’influence dépendra du nombre de ces derniers, considérons deux cas polaires :

- *Information publique et facile à interpréter :*

Parmi ces informations qualifiées de publiques, on trouve celle qui est contenue dans les rapports annuels, les états financiers, les communiqués de presse de l'entreprise, ainsi que celle diffusée par les médias, spécialisée ou non, de même que toute l'information accessible de sources publiques.

Si ces informations s'interprètent facilement, tous les investisseurs sont en mesure de déterminer leur influence sur la valeur de l'entreprise. En pareil cas, la concurrence entre les investisseurs est intense et le prix de l'action réagit de manière presque instantanée à l'arrivée de ce type d'informations.

Seul un type d'un petit nombre d'investisseur très rapide ou très chanceux, parviennent à acheter ou à vendre des actions avant que leur prix ne s'ajuste totalement, pour les autres, le prix de l'actif reflète toute l'information avant qu'ils n'aient pu échanger le moindre titre.

On parle de la forme semi-forte de l'efficience des marchés où cette hypothèse s'applique parfaitement.

- *Information privée et/ou difficile à interpréter :*

Certaines informations ne sont pas publiques ou pas immédiates d'accès, les analystes financiers consacrent du temps et des efforts pour obtenir des indices sur la qualité de la gestion de l'entreprise, sur l'état du marché, sur la concurrence, les fournisseurs, etc. Autant d'informations pertinentes pour l'analyse des flux futurs d'une entreprise.

De surcroit, même lorsqu'une information est publique, ses effets sur les flux futurs peuvent être complexes à analyser, il arrive que seuls quelques experts soient en mesure d'apprécier les conséquences économiques et financières d'un rapport consacré aux nouvelles technologies, ou que seuls quelques fiscalistes comprennent les effets d'une modification de la fiscalité de l'entreprise, de même, lorsqu'une transaction commerciale est complexe, il peut être compliquer d'en analyser les conséquences commerciales, Sur certains marchés, certains experts ont développé une expérience leur permettant de prévoir avec une grande précision le gout des consommateurs et donc les chances de succès d'un nouveau produit.

Dans tous les cas, même si l'information est publique, l'interprétation de ses conséquences sur les flux futurs de l'entreprise relève en soi d'une information privée, lorsque cette dernière est détenue par un petit nombre d'investisseurs, ils peuvent réaliser des profits en achetant ou en vendant des actions sur cette base, le cours de bourse ne s'ajuste que progressivement au fil de leurs opérations, mais même si les opportunités de profit inhérentes à la détention de ces informations sont élevées, d'autre investisseurs consacreront des ressources à l'acquisition de l'expertise nécessaire pour trouver et comprendre ces informations, et plus le nombre d'individus informés augmente, plus la concurrence est intense pour exploiter les opportunités de profit, à long terme, le degrés d'inefficience des marchés est donc limité et le prix finit quand même par refléter toute l'information.

3- La théorie du portefeuille :

Dans sa thèse soutenue en 1955, Harry Markowitz développa ce qui deviendra « la théorie du portefeuille » que c'était le véritable point de départ du modèle classique de la finance, le moment où les bases théoriques (l'efficience des marchés, la courbe de Gausse) permettent l'édification d'un modèle capable de fonctionner sur les marchés, de fournir un nouvel outil aux investisseurs et aux traders. L'apport de Markowitz sera récompensé par un prix Nobel en 1990.

Dans son raisonnement, il part de la littérature en vigueur à l'époque qui prétendait donner des conseils aux boursicoteurs, l'un des plus connus étant John Burr Williams[4]. Selon cet auteur, il faut, pour chaque action, estimer les dividendes qui seront versés, ainsi que le taux d'inflation et quelques autres données, puis classer les résultats obtenus de la société la plus prometteuse à la moins intéressante, mais, selon Markowitz, si on applique cette seule méthode, on n'achèterait que l'action qui rapporte le

[4]. John Burr Williams, *theory of investment value,* Fraser Publishing, 1938

plus ; or les investisseurs en détiennent toujours plusieurs, ils ont le soucis de ne pas mettre tous leurs œufs dans le même panier, ils raisonnent en fonction du gain, mais aussi en fonction du risque.

C'est toute l'innovation conceptuelle de Markowitz de mettre en balance le gain et le risque, et d'en permettre le calcul à l'aide de la courbe de Gausse, que ses deux paramètres, la moyenne et l'écart type vont trouver leur expression dans le domaine de la finance de la manière suivante :

- Le bénéfice escompté dépend du prix de l'action au jour de la revente, la meilleure estimation du prix future est la moyenne des rendements passés puisque la plupart des valeurs sont situés autour de cette moyenne, il ne s'agit pas ici de prévoir mais plutôt de retenir la valeur la plus probable, la moyenne se calcule comme suit :

$\mu = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} R_i$; Où :

μ : la moyenne

R_i : les rendements historiques

T : temps

- Le risque dépend de la façon dont le cours fluctue autour de la moyenne, il est donc mesuré par l'écart type ou la variance, calculée sur les cours passés comme suit :

$$\sigma^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{i=1}^{T}(R_i - \mu)^2$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$; Où:

σ^2: la variance du titre

σ: L'écart type du titre

- un écart type faible caractérise une action stable et peu risquée
- un écart type élevé signifiant la possibilité de gains ou de pertes importants, l'action est alors dite risquée.

Ainsi, la meilleure estimation du prix d'une action est sa moyenne des prix antérieurs, et son risque est mesuré par l'amplitude des variations autour de cette moyenne, chaque action peut désormais être caractérisée par deux nombres représentant le gain et le risque, on parle ici du critère « moyenne-variance ».

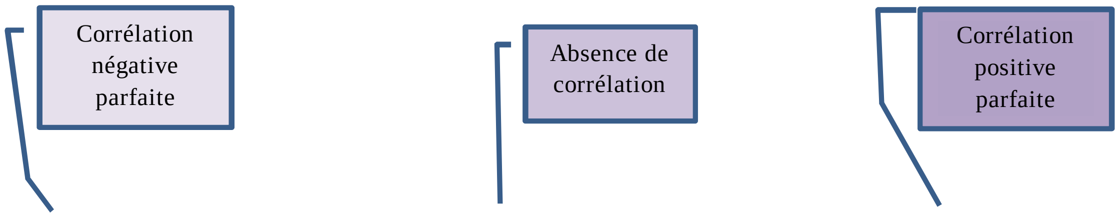
Markowitz peut ainsi comparer les différentes actions et passer à l'étape suivante : les combiner pour constituer un portefeuille. En restant là, on pourrait constituer son portefeuille d'une majorité d'actions stables, pour limiter le risque et garantir une progression du même ordre que celle du marché tout entier, et l'agrémenter d'actions risquées en espérant ainsi réaliser quelques profits occasionnels, mais notre auteur rajouta à son modèle une notion provenant de la statistique : la corrélation.

En effet, chaque action, selon le secteur auquel elle appartient ou la stratégie suivis par la direction, se comporte plus au moins différemment de l'ensemble des autres actions ; elle leur est plus au moins corrélée. Par exemple, en cas de récession, les valeurs du secteur de la consommation baisseront, mais pas nécessairement celles liées à la santé, plus stables, tandis que les sociétés de low cost pourront monter, bénéficiant d'un afflux de consommateurs désargentés, une hausse du prix du pétrole augmente les bénéfices des sociétés pétrolières et fait donc monter leur cours, mais celui des compagnies aériennes baissera suite à la progression de leurs coûts, ces deux secteurs auront tendance à évoluer en sens inverse, toute chose égale par ailleurs, il n'y a rien de mécanique dans ces évolutions, mais des différence de comportements boursiers des grands secteurs économiques apparaissent assez clairement en fonction des chocs

Corr = -1	-1<Corr < 0	Corr = 0	0 < Corr < +1	Corr = +1
Les rentabilités évoluent	Les rentabilités ont tendance	Absence de tendance commune	Les rentabilités ont tendance	Les rentabilités évoluent

qui se produisent, alors la corrélation mesure la force de la relation entre les rentabilités de deux titres et leur propension à évoluer de manière conjointe, elle est comprise entre [-1,+1].

Le tableau suivant illustre le concept de la corrélation entre deux actifs et son interprétation selon sa valeur :



toujours de manière opposée	à évoluer de manière opposée	entre les rentabilités	à évoluer de manière coordonnée	toujours en manière coordonnée

-tableau 1-

3-1 Portefeuille constitué de deux titres :

Si on prend le cas d'un portefeuille constitué de deux actions, autant de prendre une de secteur consommation et l'autre du secteur low cost, car en cas de récession, leurs cours évolueront en sens inverse et la valeur globale du portefeuille restera constante, alors que l'achat de deux actions appartenant à l'un des deux secteurs conduira à des pertes sèches, en achetant deux actions au comportement opposé, on réduit le risque du portefeuille, sans, en outre entamer sa rentabilité (la moyenne du portefeuille est la moyenne pondérée des deux actions). Le tout est plus que la somme des deux parties et Markowitz tire parti des liens de corrélation qui relient les actifs entre eux.

Mathématiquement, on détermine cette corrélation par le calcul de la covariance entre les deux actions, deux variable ayant une covariance non nulle sont dites dépendantes, la variance du portefeuille (son risque) est une formule qui additionne de façon pondérée les variances des deux actions et leurs covariances, sachant que la pondération d'un actif *i* dans un portefeuille est la part x_i de la richesse d'un investisseur investie dans cet actif, et la somme des pondération égale à 1 tel que :

- $x_i = \frac{valeur\ du\ titre\ i}{valeur\ du\ portefeuille}$
- $\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$

La rentabilité du portefeuille égale à:

- $R_p = x_1 R_1 + x_2 R_2$

La variance du portefeuille égale à :

- $\sigma_{R_p}^2 = x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + x_1 x_2 cov(R_1, R_2)$

3-2 Portefeuille constitué de N titres :

En généralisant, il est possible de réduire le risque d'un portefeuille en augmentant sa taille, ce qui permet de bénéficier d'une meilleure diversification.

La rentabilité d'un portefeuille composé de N actifs est la moyenne pondérée des rentabilités des actions qui le composent :

- $R_p = x_1 R_1 + \cdots + x_N R_N = \sum_{i=1}^{N} x_i R_i$

La variance d'un portefeuille est égale à la somme des covariances entre les rentabilités de toutes les actions qui le composent prises deux à deux, multipliées par leurs pondérations respectives :

- $\sigma_{R_p}^2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j \, cov(R_i, R_j)$

La variance d'un portefeuille égale aussi la covariance moyenne pondérée de chaque titre avec le portefeuille lui-même, où, lorsqu'on utilise la propriété de bilinéarité de la covariance, on peut calculer la variance du portefeuille tel que :

- $\sigma_{R_p}^2 = cov\left(R_p, R_p\right) = cov(\sum_{i=1}^{N} x_i R_i, R_p) = \sum_{i=1}^{N} x_i cov(R_i, R_p)$

4- Le modèle d'évaluation des actifs financiers :

Pour un portefeuille constitué d'une multitude d'action, le modèle d'Harry Markowitz nécessitait énormément de calculs que les ordinateurs de l'époque ne permettaient pas, c'est ici qu'intervient William F. Sharpe (né en 1934) qui, dans sa thèse en 1960 posa une question toute simple : que se passerait-il si tous les investisseurs intervenaient sur le marché en suivant la démarche de Markowitz ? Dans ce cas, il n'y aurait qu'un seul portefeuille efficient pour tout le monde, c'est le marché lui-même, il effectuera les calculs (moyennes, variances, et corrélations), le prix et le risque de chaque action traduiront les comportements des investisseurs.

4-1 Les hypothèses du modèle :

- Les investisseurs peuvent acheter ou vendre n'importe quel actif financier à son prix de marché, sans supporter ni couts de transaction ni impôts, et prêter ou emprunter au taux d'intérêt sans risque.
- Tous les investisseurs détiennent un portefeuille efficient, c'est-à-dire un portefeuille offrant la rentabilité espérée la plus élevée pour un niveau de volatilité donnée.
- Les investisseurs forment des anticipations homogènes sur les rentabilités espérées, les volatilités et les corrélations de tous les actifs financiers.

4-2 Le portefeuille du marché :

La mesure du risque systématique d'un actif impose de déterminer, dans la volatilité de ses rentabilités, la part qui incombe à son exposition au risque systématique, cela revient à évaluer la sensibilité de l'action aux chocs systématique qui influence l'économie dans son ensemble, il s'agit donc d'observer la façon dont la rentabilité offerte par l'action change à la suite d'une variation de 1% de la rentabilité d'un portefeuille exclusivement exposé au risque du marché. Pour ce faire, il faut combiner les actifs afin d'avoir un portefeuille complétement diversifié, que les variations de sa rentabilité ne seront liées qu'aux chocs systématique, on parle du portefeuille efficient.

Partant de cette logique, un portefeuille efficient doit donc contenir un grand nombre d'actifs, on peut supposer que le portefeuille le plus efficient est celui qui bénéficie d'une diversification maximale, donc il doit contenir l'ensemble des actifs cotés sur le marché, ce qui conduit à la gestion indiciaire et le portefeuille du marché.

4-3 Beta et prime de risque :

Sous l'hypothèse que le portefeuille de marché est efficient, le but de Sharpe était de simplifier les calculs en offrant aux intervenants une nouvelle référence, selon lui, on n'évalue plus une action en la comparant à toutes les autres prises une à une, mais au marché. A cette étape du raisonnement, Sharpe introduit les notions d'actif sans risque et prime de risque, les actifs sans risque étant les bons du trésor ayant un faible rendement mais dénués de tout risque. Sur la longue durée, la bourse rapporte plus mais avec une incertitude, on peut dire qu'elle offre une prime de risque pour détourner les investisseurs des rendements faibles mais sûrs offerts par les bons du trésor.

On peut ainsi calculer la prime du risque du marché tel que :

Prime de risque = $E(R_m) - R_s$; tel que :

- R_m : rentabilité du marché boursier
- R_s : rendement des bons du trésor

Il est possible de mesurer le risque systématique d'un titre en calculant la sensibilité de sa rentabilité aux risques du marché ou son Beta. Le béta d'un actif représente la variation espérée, en pourcentage, de sa rentabilité suite à une modification de 1% de celle du portefeuille du marché, mathématiquement, c’est le rapport de la covariance entre l’action et le marché divisé par la variance du marché

Beta = $Cov(Rm, Ri)/Var(Rm)$

4-4 Interprétation du béta:

Le béta est influencé par les flux de trésorerie disponibles aux conditions économiques, le béta moyen d’une action cotée sur le marché est à peu près unitaire, en d’autres termes, le prix moyen d’une action tend à varier de 1% suite à la même fluctuation du marché.

Les entreprises de secteurs d’activité cyclique, dont les revenus connaissent des variations importantes au cours des cycles économiques, sont par définition plus sensibles aux risques systématiques que les autres, elles ont des bêtas supérieure à 1 alors que ceux des entreprises appartenant à des secteurs d’activités non cyclique sont inférieurs à 1.

Voice les différents cas de figure:

- Si $\beta = 1$: l’action suit le marché à la hausse comme à la baisse et dans les même proportions.
- Si $\beta > 1$: l’action est plus volatile que le marché lui-même à la hausse comme à la baisse, c’est une valeur risquée, spéculative.
- Si $0 < \beta < 1$: l’action évolue moins vite que le marché, elle amortit les fluctuations du marché.
- Si $\beta = 0$: il s’agit d’un actif sans risque, par définition, indépendant de toute évolution du marché.
- Si $\beta < 0$: l’action évolue en sens inverse du marché.

On peut ainsi répartir les actions du marché en fonction de leur comportement par rapport à lui, la rentabilité d'une action donnée sera donc liée, par l'intermédiaire du Beta, à celle du marché. Le modèle de Sharpe s'écrit donc :

$$E_i = R_s + \beta_i[E\ (R_m) - R_s]$$

E_i: la rentabilité espérée du titre i.

R_s : le taux sans risque.

$E(R_m)$: la rentabilité espérée du marché ; où [E (Rm) – Rs] = prime du risque du marché.

Plus le Beta est élevé, plus la rentabilité de l'action augmente, mais plus elle devient volatile donc risquée, l'idée que plus on risque plus on gagne est confirmée et surtout mesurée par cette formule, c'est ce que l'on appelle le MEDAF (modèle d'évaluation des actifs financiers), le paradigme de la gestion des portefeuilles sur les marchés financiers. Par rapport à Markowitz, les calculs à effectuer sont réduites.

Sur cette base, une innovation importante a eu lieu dans les années 1970, il s'agit du modèle APT (arbitrage pricing theory) de Stephen Ross en 1976, qui permet de prendre en compte plusieurs facteurs d'évolution du cours d'une action. Mathématiquement le modèle s'écrit de la même façon que celui de Sharpe, mais avec plusieurs Beta pondérés liés à différents facteurs, il faut donc dans un premier temps, déterminer les facteurs d'évolution du cours des actions (le taux d'inflation, l'évolution du pouvoir d'achat, les perspectives de croissance...) ce qui nécessite de nombreux calculs économétriques, puis quantifier les multiples Betas et leur pondération, la complexité du modèle augmente, au lieu d'un facteur chez Sharp, on obtient une matrice de variances-covariances de grande taille, mais l’évolution de l’outil informatique a poussé l’exploitation du modèle APT, un modèle multifactoriel permettant de mieux décomposer la performance d’un portefeuille, comprendre sa dynamique et élaborer des prévisions en fonction des valeurs attendus des différents facteurs.

5- Le modèle d’évaluation d’options :

5-1- la notion d’option :

Avec la fin des accords de Betton-Woods (suspension de la convertibilité de dollar en or le 15 août 1971) qui signifie la fin du régime des changes fixes et le passage aux changes flottants en 1973, les entreprises ont eu subitement besoin de se protéger des variations des cours des monnaies. Les options vont ainsi devenir l’outil idoine pour se couvrir contre ce nouveau risque. A noter que les options existent depuis longtemps et que leur principe remonte au moyen âge (un paysan pouvait vendre sa récolte à un prix fixé à l’avance), mais il se faisait de gré à gré, en 1973 à Chicago, un marché réglementé est créé : le CBOE (Chicago Board Options Exchange).

Précisons qu’un marché réglementé fonctionne sur des règles strictes concernant l’admission des membres, les caractéristique des produits échangés, les règles de fonctionnement, la communication financière, et qu’une autorité de contrôle surveille les transactions en permanence. La sécurité et la transparence sont en principe garanties. Les marchés de gré à gré sont plus informels, dénués d’instance de régulation, plus souples aussi, mais plus risqués, on parle aussi des marchés OTC (Over The Counter) ; c’est-à-dire « au-delà du comptoir ».

Une option financière est un produit dérivé, contrat entre deux parties, qui donne à l'acheteur le droit mais pas l’obligation (le vendeur est en revanche tenu de se plier à la décision de l'acheteur) :

- d'acheter (option d'achat, appelée aussi ***call***),
- ou de vendre (option de vente, appelée aussi ***put***),

une quantité donnée d'un actif financier (action, obligation, indice boursier, devise, matière première, autre produit dérivé, fonds, inflation, etc.), appelé actif sous-jacent

- à un prix (en général) précisé à l'avance (prix d'exercice ou ***strike*** en anglais),
- à une date d'échéance donnée (option dite européenne),
- ou durant toute la période jusqu'à échéance (option dite américaine),
- avec un mode de règlement fixé à l'avance (livraison du sous-jacent ou seulement du montant équivalent).

Ce droit lui-même se négocie contre un certain prix, appelé prime, ou *premium*.

Les options s'échangent à la fois sur des marchés d'options spécialisés au sein de bourses, et sur les marchés de gré à gré.

Une option est dite :

- *dans la monnaie* (*in the money* ou ITM) lorsque son prix d'exercice est inférieur au prix de son actif sous-jacent (pour un call) ou supérieur au prix de son actif sous-jacent (pour un put) ;
- *hors de la monnaie* (*out of the money* ou OTM) dans le cas contraire ;
- *à la monnaie* (*at the money* ou ATM) si le prix d'exercice est égal au cours actuel de l'actif sous-jacent de l'option.

Les options sont utilisés pour :

- se couvrir des risques de hausse ou de baisse du sous-jacent ; ex : un exportateur algérien vend ses produits à terme en dollars, il achète des puts en dollars d'un montant équivalent pour se protéger contre les variations de cette monnaie.
- Spéculer à la baisse ou à la hausse du sous-jacent : le spéculateur cherche à tirer parti des variations des monnaies contrairement à l'entreprise.
- Pour spéculer sur la volatilité : on peut prévoir que telle action va voir sa volatilité augmenter à la suite d'un évènement précis et prendre position sur cela grâce à des options.

La question de savoir quelle est la valeur d'une option (sa prime) se pose d'elle-même, les opérateurs cherchaient une formule. Tous pensaient, logiquement, qu'il fallait connaitre le prix de l'action sous-jacente à l'échéance pour déterminer le prix de l'option.

5-2 la formule de Black & Scholes :

Fisher black (1938-1995) et Myron Scholes (né en 1941) partirent d'une autre idée, pour eux la valeur C_t d'une option peut être obtenue à partir des cinq paramètres suivants :

- S : le prix au comptant de l'action.
- T : la durée exprimée en années jusqu'à la maturité de l'option.
- K : le prix d'exercice de l'option.
- VA(K) : la valeur actuelle d'une obligation sans risque qui versera un flux K à l'échéance de l'option.
- σ : la volatilité annuelle de l'action.

Tel que :

⇨ *Pour un call sur actions ne versant pas de dividendes :*

$C_t = S_t \times N(d_1) - VA(K) \times N(d_2)$

Où N(d) représente la valeur de la fonction de répartition d'une loi normal centrée réduite au point *d* avec:

$$d_1 = \frac{\ln[S/VA(K)]}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$N(d) = \int_{-\infty}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \ ; \ t = \frac{d-\mu}{\sigma}$$

⇨ *Pour un put sur actions ne versant pas de dividendes:*

$P_t = VA(K) \times (1-N(d_2)) - S \times (1-N(d_1))$

D'après ce modèle, on peut remarquer que :

- Si une action est très risquée, une option dont le prix d'exercice set différent du cours actuel vaudra quelque chose puisque la probabilité qu'elle dépasse ce prix est forte.
- Si une action est très stable, une option dont le prix d'exercice est différent du cours actuel ne vaudra pas grande chose puisque la probabilité qu'elle dépasse ce prix est faible.

Dans le premier cas, l'option a de la valeur (mesuré précisément avec la formule de Black-Scholes) car son prix d'exercice pourra être atteint à plusieurs reprises en raison de la volatilité élevée de l'action. En revanche, dans le second cas, la faible volatilité de l'action lui laisse peu de chance d'atteindre son prix d'exercice avant la date d'échéance fixée, l'option n'aura donc pas une grande valeur (sa prime sera faible). Cela se comprend intuitivement, on n'a pas besoin de se couvrir contre un actif financier qui demeure très stable, au contraire, un actif volatile génère une incertitude forte et s'en protéger coutera un prix significatif, on comprend maintenant comment on peut spéculer ou prendre une assurance sur la volatilité.

La formule et la démonstration de Black et Scholes sont complexes, mais on doit se rappeler qu'elle suppose que les prix des actions suivent la courbe de Gausse.

6- Le modèle Modigliani & Miller :

Lorsqu'une entreprise a besoin de capitaux pour financer des projets à long terme, elle doit décider de la façon de les obtenir et donc du type de financement optimal, soit par un endettement, ou bien par l'émission de nouveaux titres ou même un financement mixte.

Dans le cadre du marché financier parfait, et sous les hypothèses suivantes :

- Les agents économiques peuvent acheter ou vendre les mêmes actifs financiers, à un prix de marché égal à la valeur actuelle de leurs flux de trésorerie futurs
- Il n'existe pas d'impôts ni de couts de transaction sur les marchés financiers.
- Les décisions de financement d'une entreprise n'influence pas les flux de trésorerie de ses actifs et ne sont porteuse d'aucune information à leur propos.

Modigiliani et Miller, dans un article publié en 1958, ont présenté deux propositions disant que :

- *Proposition 1 de Modigiliani et Miller : la valeur d'une entreprise est égale à la valeur de marché des flux de trésorerie de ses actifs, et que cette valeur n'est pas influencée par la structure financière de l'entreprise.*

Ils sont parvenus à ce résultat grâce à un raisonnement simple, en l'absence d'impôts et des couts de transaction, les flux de trésorerie dont bénéficient les investisseurs (actionnaires et créanciers) sont égaux aux flux de trésorerie générés par l'actif de l'entreprise, la loi du prix unique indique que les titres émis par l'entreprise ont une valeur égale à celle de ses actifs. Dès lors, tant que les choix financiers de l'entreprise ne modifie pas les flux de trésorerie de ses actifs, il n'y a aucune raison pour que ceux-ci influence sa valeur ou le montant des capitaux qu'elle peut lever.

Cette proposition s'applique à toutes les combinaisons possibles de dette et de capitaux propres même lorsque l'entreprise émis d'autres types de titres financiers, comme des obligations convertibles, la logique est toujours la même, puisque les investisseurs peuvent librement acheter ou vendre les titres.

Grâce à ce travail, il est possible de construire un bilan d'entreprise en valeur de marché, ce dernier est analogue à un bilan comptable, à deux importantes différences :

La première est que, dans un bilan en valeur du marché, tous les actifs et passifs de l'entreprise, y compris certain actifs immatériels (la réputation, capital humain…), sont comptabilisés, ce qui n'est pas le cas dans le bilan à valeur comptable. La deuxième est que, tout est évalué en valeur du marché et non en valeur comptable.

Actifs	*Passifs*
Immobilisations incorporelles : Brevet, réputation, capital humain… **Immobilisations corporelles :** Constructions, machines… **Actifs circulants :** Stocks, clients… disponibilités	**Capitaux propres :** Actions ordinaires, actions à dividendes prioritaires… **Titres de dettes :** Obligations convertibles Dettes à long terme Dettes à court terme

Valeur du marché des actifs	Valeur du marché des titres émis par l'entreprise

Exemple : bilan en valeur de marché.

-Tableau 2-

D'où :

Valeur de marché des actions = V M des actifs – V M de la dette et autres passifs

- *Proposition 2 de Modigiliani et Miller : le cout des capitaux propres d'une entreprise endettée augmente avec son levier exprimé en valeur du marché.*

Partant de la première proposition, qui permet de relier endettement et cout des capitaux propres, avec :

- V_{cp} et V_d, la valeur de marché des capitaux propres et de la dette de l'entreprise endettée.
- V_u, la valeur de marché de l'entreprise non endettée.

Tel que : $V_{cp} + V_d = V_u$

Et sachant que la rentabilité d'un portefeuille est égale à la moyenne pondérée des rentabilités des titres qui le composent, il est donc possible d'établir une relation entre la rentabilité des capitaux propres d'une entreprise endettée (R_{cp}), la rentabilité de la dette (R_d) et la rentabilité d'une entreprise à endettement nul (R_u) :

$$\frac{V_{cp}}{V_{cp}+V_d} R_{cp} + \frac{V_d}{V_{cp}+V_d} R_d = R_u$$

Partant de cette équation, il est possible d'exprimer la rentabilité des actions d'une entreprise comme :

$$R_{cp} = \underbrace{R_u}_{\substack{risque\ de\ l'actif \\ de\ l'entreprise\ \text{à} \\ endettement\ nul}} + \underbrace{\frac{V_d}{V_{cp}}(R_u - R_d)}_{\substack{risque\ additionnel \\ d\text{ù}\ au\ levier}}$$

Cette équation permet d'appréhender les conséquences de la dette sur la rentabilité des capitaux propres, la rentabilité des actions d'une entreprise endettée est égale à celle d'une entreprise non endettée, augmentée d'une prime liée au risque provoqué par l'endettement. Cette prime augmente la rentabilité des actions lorsque l'entreprise réalise une bonne performance ($R_u > R_d$) et la réduit en cas de performance médiocre ($R_u < R_d$), le niveau de risque supplémentaire est supporté par les actionnaires, et donc la prime de risque dépend de l'endettement mesuré par le levier en valeur de marché ($\frac{V_d}{V_{cp}}$).

Cette observation a permis à Modigiliani et Miller d'énoncer leur seconde proposition et en arriver au cout moyen pondéré du capital avant impôt, tel que :

$$r_{cmpc} = r_u = \frac{V_{cp}}{V_{cp}+V_d} r_{cp} + \frac{V_d}{V_{cp}+V_d} r_d$$; Où :

- r_{cp} : le cout des capitaux propres.
- r_d : le cout de la dette.
- r_u : cout de capital à endettement nul.

SECTION II : LES FAIBLESSES DU MODELE.

Les mesures d'incertitude basées sur la courbe de gausse négligent la possibilité, et l'impact, des valeurs extrêmes et les discontinuités des séries –supposées continues-. Quoique les déviations larges soient rares, elles ne peuvent être écartées de l'étude car, cumulativement, leur impact est dramatique.

L'approche gaussienne commence par la focalisation sur l'ordinaire, en traitant les déviations extrêmes comme auxiliaires, alors que ces derniers sont la principale cause des krachs, les modèles qui se basent sur cette approche peuvent être utiles s'il y avait une raison rationnelle pour que les valeurs ne dévient pas trop de la moyenne.

Je ne suis pas en train de rejeter toute la théorie classique, ni en train de dire que la loi normal ne permet pas la prévision de quelques valeurs extrêmes, mais elle nous dit qu'elles sont tellement rares qu'elles ne jouent aucun rôle dans le total, et que leur effet est pitoyablement petit et diminue encore si la population s'accroit.

1- Les hypothèses rassurantes du modèle :

Ce sont principalement les hypothèses qui conduisent à obtenir ce léger caractère aléatoire.

1-1 l'hypothèse de l'indépendance :

Les variables du modèle sont indépendantes les unes des autres, donc le nouveau tirage n'est pas affecté par le précédent, ce qui veut dire en outre que le processus et sans mémoire.

Si on introduit une dépendance temporelle entre les variables, c'est tout le modèle qui devient sans valeur, par exemple la réputation, en réalité, les gains réalisés dans une période donnée conduiront à des gains futurs, et c'est pratiquement le cas des pertes.

Si on considère un jeu de lance de dés, là on peut dire que les variables sont équiprobable et indépendantes car avoir un certain numéro au premier lancer n'augmentera pas les chances d'en avoir le même au deuxième lancer, mais la réalité n'est pas un jeu.

1-2 la concentration autour de la moyenne :

Pas de larges déviations, j'ai déjà parlé de ce point précédemment, mais son importance impose un test qui m'a venu à l'esprit.

Le test est le suivant :

On considère une série de données dont les paramètres selon une approche normale sont : $\mu=15$, $\sigma=2$, $n=1000$ observations.

Ici, la probabilité d'avoir une observation X=7 est $4*10^{-5}$, une probabilité dénuée de signification.

Maintenant, supposant que cet évènement ait occurrence, les changements vont être les suivant :

μ= [(15*1000) +7]/1001=14.992 ; en tenant compte de cette très petite variation dans la moyenne, l'écart type devient :

$(n+1)\sigma 2= [(0.08)^2*1000+ 4*1000]+ (7-14.992)^2$; donc, σ= 2.015.

Si on refait le même calcule de probabilité d'occurrence une nouvelle fois on trouvera P(x)= $4.8*10^{-5}$, et même si l'évènement ait encore une fois de plus occurrence, cette probabilité restera dénuée de toute signification, c'est pourquoi j'ai qualifié ces hypothèses de rassurantes, même en cas ou le pire arrive le modèle continue de nous rassurer, et c'est d'ailleurs pourquoi j'ai dit que la réalité n'est pas un jeu, car un tel choc pourra mener à une catastrophe dès sa première occurrence.

Ce qui doit être surprenant ici n'est pas l'ampleur d'une telle variation mais notre dangereuse sous-estimation de son risque d'apparition.

Les notions «moyenne et standard déviation » n'ont pas de sens en dehors des mures de la loi normal ou elles sont suffisantes pour expliquer des phénomènes ou même à construire des processus, alors qu'en économie et en finance et gestion des risques principalement, on doit se concentrer sur le hautement improbable que sur l'ordinaire, ce qui vas au-delà de ce que la loi normal peut décrire et de ce qu'un processus gaussien peut modéliser.

Benoit Mandelbrot entreprit en 1960 de tester la loi normale sur les données réelles constatées sur le marché bousier, il découvre que les variations de grande ampleur du cours sont bien plus fréquentes que ne le suppose la loi normal, pour l'indice Dow Jones de 1916 à 2003, *« la théorie prédit 6 jours où l'indice varierait de plus de 4,5% ; en réalité, il y en a eu 366»*[5].

La probabilité d'avoir, comme le 31 aout 1998 durant la crise asiatique, une chute du Dow Jones de l'ordre de 6,8% est de une sur vingt millions (soit une fois en 100000 ans), et la probabilité d'avoir trois chutes graves durant ce même mois d'aout (-3,5%, -4,4%, -6,8%) est de une sur 500 milliards, quant au krach du 19 octobre 1987 (-22,6%), sa probabilité est de 1 sur 10^{50}, soit un nombre dénué de signification. Cet événement n'aurait jamais dû se produire, dans le monde idéale de la loi normale, il n'y a pas de crise, mais il ne s'agit pas seulement de la prédiction des valeurs extrêmes dont on pourrait pensait qu'elles sont exceptionnelles, c'est le processus même de la loi qui est pris en défaut.

Mandelbrot explique ainsi dans le même ouvrage que l'hypothèse d'indépendance ne tient pas, *« les variations de prix ne sont pas indépendantes les unes des autres…aujourd'hui influence demain »*, il y a un effet d'inertie, une mémoire dans les cours de bourse que Mandelbrot formula plusieurs hypothèses afin de l'expliquer :

- ⇨ Ce qu'une société fait aujourd'hui (le lancement d'un nouveau produit, le rachat d'un concurrent) déterminera son aspect pendant plusieurs années.
- ⇨ Il faut pour le marché un temps assez long pour réellement absorber l'information et la refléter dans le cours.

[5] Benoît Mandelbrot, *The Variation of Certain Spéculatives Prices*, Journal of Business, 1962.

⇨ Confrontés à de mauvaises nouvelles, certains investisseurs peuvent réagir immédiatement tandis que d'autre attendront un certain moment (les investisseurs ne se ressemblent pas)

2- Les hypothèses imposées à la modélisation financière :

2-1 la rationalité des agents :

Les travaux des économistes gaussien tel que Markowitz et sharp par exemple, se base sur cette hypothèse principale, tel que si on suppose qu'elle n'est plus vérifiée, le résultat sera qu'il n'y a ni de théorie de portefeuille, ni béta,… et en réalité elle ne l'est pas.

Le terme rationalité est relatif, car chaque agent a un certain niveau d'aversion aux risques, ainsi que le temps de réaction en cas de pertes ou de gains diffère d'un agent à un autre, certain ont une réaction immédiate tandis que d'autres prendront plus de temps, les deux catégories cherchent à réaliser des profits.

Supposant que les différentes catégories contiennent le même nombre d'agents, alors laquelle est plus rationnelle ?

Et même si une catégorie est majoritaire en nombre, elle va faire basculer le marché certes, mais un agent qui s'est placer dans le camp majoritaire n'as rien de rationnel, il a juste suivis le courant, c'est pourquoi je dis que ce concept est relatif.

2-2 L'efficience des marchés :

Cette hypothèse nie toute dépendance temporelle entre les prix des actifs, c'est-à-dire que c'est le berceau de la courbe de gausse au sein du paradigme de finance classique.

Si les prix reflètent en permanence toute l'information pertinente disponible, et les prix futurs dépondront uniquement des informations qui parviendront sur le marché, ce qui veut dire que les prix sont des variables gaussiens, pourquoi il y a des crises, des krachs, de la panique…

CONCLUSION :

L'approche normale s'applique à des variables purement aléatoires, ou dites en statistique, indépendantes et identiquement distribuées, ainsi, en se basant sur deux paramètres, la moyenne et l'écart type, ce modèle traite les variables comme étant continues.

En traitant les séries économiques ou financières, on remarquera que la discontinuité est assez présente, des hausses et des baisses de grande ampleur se produisent souvent.

La bonne gestion et prise de décision conduira à des résultats meilleurs, ce qui contribuera à l'augmentation de la valeur de l'entreprise d'une part, et d'autre part, à un impact positif sur la réputation de cette dernière, cette réputation, qu'elle soit positive ou négative, peut affecter l'avenir de la firme.

D’après ce dernier point, on ne peut dire que les variations du prix de son action sont purement aléatoires.

CHAPITRE II : LA MODELISATION DES PHENOMENES EN FINANCE

Dans ce chapitre, je mettrai l’accent sur les processus stochastiques qui représente l’outil de base de la modélisation.

Au cours de la première section, je présenterai les mouvements browniens, une famille de processus qui se basent sur l’approche normale.

Au cours de la seconde, je présenterai les travaux de Mandelbrot concernant la modélisation en finance, ses hypothèses, et ses théories.

SECTION I : LES MOUVEMENTS BROWNIENS

1- Processus stochastiques et variables aléatoires :

Une variable aléatoire suit un processus stochastique lorsque les changements de sa valeur, au cours du temps, sont au moins en partie, aléatoires.

Lorsque les changements de valeur de la variable ne se réalisent qu'à des points discrets du temps, on parle de processus en temps discret.

Lorsque les changements peuvent se produire à n'importe quel moment, on dit qu'il s'agit d'un processus en temps continu.

Une variable qui a une distribution de probabilité stable pour toute translation dans le temps suit un processus stationnaire, en revanche, si sa distribution de probabilité change, en particulier son espérance et sa variance, on dit qu'elle suit un processus non stationnaire.

2- Le mouvement brownien simple :

Le mouvement brownien simple est aussi appelé processus de Weiner, c'est un processus de Markov en temps continu et à variable continue.

Ses accroissements aléatoires sont indépendantes les uns des autres, tel que, l'accroissement qui se produit au cours d'un intervalle de temps défini a une distribution normale dont la variance augmente avec la longueur de l'intervalle.

Soit z une variable qui suit un mouvement brownien simple ; soit Δz l'accroissement de z pendant un intervalle de temps Δt. Δz a deux propriétés :

- *Propriété 1 :*

$$\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

L'accroissement dépend donc de la racine carrée de l'intervalle de temps pendant lequel il se produit.

ε est une variable aléatoire qui a une distribution normal centrée réduite, ce qui signifie que :

- Son espérance mathématique est égale à 0
- Son écart type est égal à 1

Statistiquement, $\varepsilon \sim N(0,1)$

On peut déduire les propriétés de Δz à partir de ceux de ε tel que :

- L'accroissement Δz suit une loi normale
- $E(\Delta z) = E(\varepsilon) = 0$
- $\sigma_{\Delta z}^2 = \left(\sqrt{\Delta t}\right)^2 \sigma_\varepsilon^2 = \Delta t$
- $\sigma_{\Delta z} = \sqrt{\Delta t}$

Et donc, $\Delta z \sim N\ (0, \sqrt{\Delta t})$.

Δz a donc une variance égale à la longueur de l'intervalle de temps pendant lequel il se réalise.

- *Propriété 2 :*

Les accroissements Δz relatifs à deux intervalles de temps quelconques Δt sont indépendants.

Cette propriété fait que, à un moment donné, le prochain accroissement de z est indépendant des accroissements passés et que les valeurs futures de z ne dépendent que de la valeur de z au moment présent et non de ses valeurs passées.

Considérons un long intervalle de temps T, qui s'étend entre deux dates. Si nous appelons la première date 0, nous pouvons appeler la deuxième T, donc T désignera la fin de la période de temps considérée et la durée de cette période avec :

La durée de temps T devisée en (n) petits intervalles Δt, tel que : T = n×Δt et dans chaque intervalle se produit un accroissement : $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t} \sim N(0, \sqrt{\Delta t})$

Posons : z(0) la valeur de z à la date 0, et z(T) la valeur de z à la date T ; l'accroissement pendant la période de longueur T s'écrit : z(T) – z(0).

L'accroissement de z pendant la période de temps T égal à la somme des (n) accroissements qui se sont produits dans les (n) petits intervalles Δt.

Nous avons donc : $z(t) - z(0) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}$

Cet accroissement est une somme de variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi normale nous pouvons conclure que :

- $E[z(T) - z(0)] = 0$
- $\sigma^2_{z(T)-z(0)} = n\Delta t = T$
- $\sigma_{z(T)-z(0)} = \sqrt{T}$
- $z(T) - z(0) \sim N(0, \sqrt{T})$

On remarque que sur la période de temps T, nous avons une triple additivité :

- Une additivité des petits intervalles de temps Δt

- Une additivité des accroissements Δz relatifs à chaque petit intervalle Δt
- Une additivité des variances de Δz (et non des écarts types)

Les relations suivantes permettent de passer de l'accroissement Δz à la variable z :

- $Z(T) = z(0) + [z(T) - z(0)]$
- $z(T) - z(0) \sim N(0, \sqrt{T})$

Lorsqu'on est à la date 0, z(0) est connu avec certitude donc :

- $E[z(T)] = z(0)$
- $\sigma^2_{z(T)} = T$
- $\sigma_{z(T)} = \sqrt{T}$
- $z(T) \sim N[z(0), \sqrt{T}]$

Sur une très longue période, la variance de z peut tendre vers l'infini, donc z suit un processus non stationnaire.

Le mouvement brownien simple est la limite du processus décrit ci-dessus pour z lorsque $\Delta t \rightarrow 0$.

3- Mouvement brownien avec drift :

Le mouvement brownien simple décrit ci-dessus, sert à construire des processus stochastiques plus complexes, l'un d'eux est le mouvement brownien avec drift, appelé aussi processus de Wiener généralisé.

Une variable x suit un mouvement brownien avec drift si son accroissement Δx qui se produit pendant l'intervalle de temps Δt a pour équation :

- $\Delta x = a\Delta t + b\Delta z$

Tel que :

- Les deux paramètres a et b sont des constantes.
- La variation Δz est l'accroissement d'un mouvement brownien simple.

L'équation $\Delta x = a\Delta t + b\Delta z$ présente deux composantes :

- Le terme $a\Delta t$: il ne contient aucune variable aléatoire ; (a) est un paramètre appelé drift, qui indique un accroissement certain.
- Le terme $b\Delta z$: c'est une variable aléatoire, il représente une variation aléatoire qui s'ajoute à la variation certaine de $a\Delta t$ pour déterminer la variation de x. Cette variation est égale à (b) fois l'accroissement aléatoire du brownien z.

Dans un petit intervalle de temps Δt, on a :

$$\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t} \quad avec\ \varepsilon \sim N(0{,}1)$$

Et sachant que : $b\varepsilon\sqrt{\Delta t} \sim N\left(0, b\sqrt{\Delta t}\right)$

On peut conclure que :

- $E(\Delta x) = a\Delta t.$
- $\sigma_{\Delta x}^2 = b^2\Delta t$
- $\sigma_{\Delta x} = b\sqrt{\Delta t}$
- $\Delta x \sim N(a\Delta t\ , b\sqrt{\Delta t})$

Maintenant, si on considère un long intervalle de temps T, et on le décompose en (n) petits intervalles Δt qui produisent (n) accroissements indépendants Δx qui suivent chacun une loi normale d'espérance $a\Delta t$ et d'écart type $b\sqrt{\Delta t}$.

On peut en conclure que l'accroissement x(T) – x(0) suit une loi normale avec :

- $E[x(T) - x(0)] = aT$
- $\sigma^2_{x(T)-x(0)} = b^2T$
- $\sigma_{x(T)-x(0)} = b\sqrt{T}$

C'est-à-dire que :

$$x(T) - x(0) \sim N(aT, b\sqrt{\Delta t})$$

On peut alors passer à la variable x tel que :

X(T) = x(0) + [x(T) – x(0)] ; et conclure que la variable x(T) suit elle aussi une loi normale avec :

- $E[x(T)] = x(0) + aT$
- $\sigma^2_{x(T)} = \sigma^2_{x(T)-x(0)} = b^2T.$
- $\sigma_{x(T)} = b\sqrt{T}$

A partir du modèle on peut définir le rôle des deux composantes du processus : le drift et la volatilité, à court terme, c'est la volatilité qui joue le rôle principal. A long terme, c'est le drift qui endosse le rôle.

On remarque d'après l'écart type de [x(T) – x(0)] que :

- Quand T > 1 ; $\sqrt{T} < T$, donc la probabilité que x(T) devienne inferieure à x(0) est faible.
- Quand T < 1 ; $\sqrt{T} > T$, donc la probabilité que x(T) devienne inférieure à x(0) est importante.

4- Processus d'ITO [6] :

Considérons une variable x qui suit un mouvement brownien avec drift, l'accroissement Δx pendant un petit intervalle de temps $\Delta t \to 0$ est tel que :

$\Delta x = a\Delta t + b\Delta z$; où Δz est l'accroissement d'un brownien simple.

Les deux coefficients a et b sont constantes quelle que soient les valeurs prisent par x ou par t, on obtient une généralisation du mouvement brownien avec drift en utilisant des paramètres (a) et (b) qui sont des fonctions spécifiées de (x) et de (t), on obtient une équation de la forme :

$\Delta x = a(x,t)\Delta t + b(x,t)\Delta z$; avec $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}\ \ avec\ \ \varepsilon \sim N(0,1)$

On remarque que le coefficient du drift et le coefficient de la variation varient et sont des fonctions de la variable d'état x et du temps t.

Ce processus stochastique en temps continu et variable continue porte le nom de processus d'ITO.

L'espérance et la variance de l'accroissement Δx deviennent :

- $E(\Delta x) = a(x,t)\Delta t\ \ car\ E(\Delta z) = 0$
- $\sigma^2_{\Delta x} = E[(\Delta x)^2] - [E(\Delta x)]^2$; la variance de Δx contient des termes en Δt, $(\Delta t)^2$, et en $(\Delta t)^{3/2}$, et comme $\Delta t \to 0$, les termes en Δt

[6] Kiyoshi ITO, mathématicien japonais (1915-2008)

d’un degré supérieur à 1 peuvent être négligés, ce qui permet d’écrire :

$\sigma^2_{\Delta x} = b^2 x \Delta t$; Où :

- A(x,t) est appelé : drift instantané du processus d’ITO
- B^2(x,t) est appelé : variance instantanée du processus d’ITO

Le plus connu de la famille des processus d’ITO est le mouvement brownien géométrique.

4-1 Le mouvement brownien géométrique :

Dans ce processus d’ITO, les fonctions qui déterminent le drift instantané et la variance instantanée sont extrêmement simples :

- A(x,t) = αx
- B(x,t) = σx

Avec α et σ constants.

L’équation du mouvement brownien géométrique s’écrit donc :

$\Delta x = \alpha x \Delta t + \sigma x \Delta z$; $avec\ \Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}\ \ et\ \ \varepsilon \sim N(0{,}1)$

Le mouvement brownien géométrique (MBG) est utilisé pour représenter l'évolution du cours des actions, pour modéliser l'évolution des prix ou les cash-flows générés par des entreprises ou par des projets d'investissement.

4-1-1 Propriété fondamentale d'une variable qui suit un MBG :

Si une variable x(T) suit un mouvement brownien géométrique, alors à n'importe qu'elle date T, x(T) a une distribution log-normale, cela signifie que :

$$logx(T) \sim N$$

Cette propriété est dénommée « lemme d'ITO », elle permet d'établir à partir de l'équation du MBG que :

$$\Delta logx = \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\Delta z$$

On remarque que le logarithme de x suit un mouvement brownien avec drift dont le taux de drift est $\alpha - \frac{\sigma^2}{2}$ et le taux de variance est σ^2.

On sait donc que l'accroissement du logarithme de x au cours d'un intervalle de temps fini Δt, a une distribution normale, d'espérance $(\alpha - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t$ et d'écart type$\sigma\sqrt{\Delta t}$.

Si on choisit une date future quelconque T, et on appellera x(0) la valeur présente de x, et x(T) sa valeur future au temps T :

L'accroissement du logarithme de x entre les deux dates s'écrit donc :

Log[x(T)] – log[x(0)] ;

Cet accroissement suit une loi normale dont l'espérance et l'écart type :

- $E[\log[x(T)] - \log[x(0)]] = \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)T.$
- $\sigma_{logx(T)-logx(0)} = \sigma\sqrt{T}.$
- $c'est\ a\ dire$: $\log[x(T)] - \log[x(0)] \sim N\left[\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\ ,\sigma\sqrt{T}\right]$

D'après la relation suivante, on peut en déduire que log[x(T)] ~ N :

On a :

Log[x(T)] = log[x(0)] + [log[x(T)] – log[x(0)]]

⇨ Log[x(T)] ~ $N\left[\log[x(0)] + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\ ,\sigma\sqrt{T}\right]$; sachant que x(0) est une valeur certaine et donc log[x(0)] est une constante.

On voit que le logarithme de x(t) suit une loi normale, on en déduit que x(T) suit une loi normale aussi

4-1-2 Espérance et variance du brownien géométrique :

Sachant que x(T) suit une loi normale, on peut calculer son espérance et sa variance :

⇨ *en t = 0 :*

- $E[x(T)] = x(0) * e^{\alpha T}.$
- $\sigma^2_{x(T)} = x(0)^2 * e^{2\alpha T} * (e^{\sigma^2 T} - 1)$

⇨ *En t = T :*

De façon générale, si (t) n'est pas égale à 0, la durée entre la date présente (t) et la date future (T) sera (T - t) tel que :

- $E[x(T)] = x(0) * e^{\alpha(T-t)}$.
- $\sigma^2_{x(T)} = x(0)^2 * e^{2\alpha(T-t)} * \left(e^{\sigma^2(T-t)} - 1\right)$

4-1-3 Exemple d'application d'un processus brownien géométrique :

Valeur actuelle des cash-flows d'un projet d'investissement :

Les cash-flows sont générés de façon continue, on fait l'hypothèse qu'ils suivent un mouvement brownien géométrique. A chaque instant futur, on calcule leur espérance qu'on actualise, et on doit calculer la somme de ces valeurs actuelles.

Chaque flux est réalisé pendant un intervalle de temps très petit Δt, et la somme est une intégrale.

En supposant que :

- Il s'agit d'un projet perpétuel dont les cash-flows sont réalisables entre l'instant présent et l'infini, c'est-à-dire que T ϵ [0, +∞]
- Le taux d'actualisation *r* est constant
- X(0) désigne le premier cash-flow
- Que α désigne l'espérance du taux de croissance instantané du cash-flow

La valeur actuelle des cash-flows s'écrit donc :

$E\left[\int_0^{\infty} x(T) * e^{-rt} dt\right]$

Sachant que :

$$E[x(T)] = x(0) * e^{\alpha T}$$

On peut écrire :

$$\int_0^{\infty} x(T) * e^{-rt} dt = \int_0^{\infty} x(0) * e^{-(r-\alpha)T} dt = \frac{x(0)}{r-\alpha} \text{ ; } avec\text{: } r > \alpha$$

D'où :

La valeur actuelle des cash-flows = $\frac{x(0)}{r-\alpha}$

4-1-4 Détermination de α :

On a :

$$E[x(T)] = x(0) * e^{\alpha T}$$

Et donc :

$$\frac{E[x(T)]}{x(0)} = e^{\alpha T}$$

⇨ $\ln\left[\frac{E[x(T)]}{x(0)}\right] = \ln(e^{\alpha T}) = \alpha T * \ln(e)$; $avec\text{: } \ln(e) = 1$

⇨ $\alpha = \frac{\ln\left[\frac{E[x(T)]}{x(0)}\right]}{T}$

4-1-5 Détermination de σ :

On a :

$$\sigma^2_{x(T)} = x(0)^2 * e^{2\alpha T} * \left(e^{\sigma^2 T} - 1\right)$$

⇨ $$\left(e^{\sigma^2 T} - 1\right) = \frac{\sigma^2_{x(T)}}{x(0)^2 * e^{2\alpha T}}$$

⇨ $$e^{\sigma^2 T} = \frac{\sigma^2_{x(T)}}{x(0)^2 * e^{2\alpha T}} + 1$$

⇨ $$\sigma^2 T = \ln\left[\frac{\sigma^2_{x(T)}}{x(0)^2 * e^{2\alpha T}} + 1\right]$$

⇨ $$\sigma^2 = \frac{\ln\left[\frac{\sigma^2_{x(T)}}{x(0)^2 * e^{2\alpha T}} + 1\right]}{T}$$

SECTION II : VERS UN NOUVEAU MODELE :

Benoit Mandelbrot, un esprit éminent, ses premières publications en finance remontent aux années 1960 remettant en cause la théorie classique de la finance, dans un premier article sur le cours du coton en 1962, Mandelbrot a détecté une dépendance temporelle entre les prix des cours de bourse, qu’il a liée à l’auto-similarité et l’auto-affinité, deux concepts que dix ans plus tard il les a utilisé pour définir les fractals et puis la dimension fractal des fluctuations boursières.

1- Qu’est-ce qu’une fractal ?

1-1 Les fractales dans la nature :

Un fractal est un objet sujet à de multiples divisions tel que chacune de ces divisions conserve, à l'échelle qui lui est propre, la structure du tout. Le brocoli est un objet fractal par excellence : la fleur principale peut être séparée en une multitude de fleurs qui reproduisent, à leur propre échelle, la structure de la fleur principale et il en va de même pour ces fleurs « secondaires » qui, à leur tour, reproduisent la même structure.

1-2 Les fractales en finance :

Donc, les fractales sont des objets géométriques qui ont la propriété que voici: ils peuvent être décomposés en fragments dont chacun a la même forme que le tout. Dans le cas de la Bourse, l'objet géométrique est une de ces courbes très irrégulières qui donnent, par exemple, le prix d'une action en fonction du temps.

Les journaux reproduisent ces courbes selon un format "paysage" de largeur et hauteur données. Mais supposez qu'on ne prenne en considération qu'une partie d'une telle courbe; Par exemple, au lieu de suivre un prix sur cinq ans, on peut décider de le suivre, mais avec une précision croissante, sur une année, quelques mois, voire quelques jours. La courbe partielle sera, elle aussi, imprimée selon le format "paysage." C'est là qu'interviennent les fractales.

Une fractale auto-affine est un objet géométrique pour lequel les parties ainsi réduites suivent les mêmes règles que le tout. Que l'on considère un cours boursier sur une longue période, ou sur une courte période, les détails seront tout à fait différents, mais l'allure générale, les règles générales, seront très semblables.

Un objet fractal (ou une fractale) est un objet (réel ou imaginaire) qui présente deux caractéristiques essentielles :

- L'auto-similarité apériodique (effet Joseph): cela signifie que la structure globale de l'objet se répète en chacune de ses parties selon une dimension naturellement différente; la fractale est apériodique pour les objets présentant une trajectoire temporelle (comme les produits financiers par exemple), la structure se répète selon des périodes qui divergent.
- La présence de sauts imprévisibles (effet Noé): les objets qui présentent une trajectoire temporelle peuvent présenter, de manière totalement apériodique, des sauts importants, soudains et qui interviennent sur une période de temps très courte (par exemple un jour pour un produit financier quelconque).

Contrairement à l'approche log-normale qui est fondée sur la « marche au hasard », l'approche fractale est relativement déterministe et s'apparente, sur ce point, avec la théorie du chaos. Cette théorie est une approche résolument déterministe mais qui rend impossible toute anticipation (contrairement à l'approche fractale). Selon la théorie du chaos, il est possible de dresser l'inventaire de tous les facteurs susceptibles de jouer un rôle dans l'évolution temporelle d'un objet ; ce qui pose problème, c'est la détermination du poids que, concrètement, peut prendre chacun des facteurs dans l'évolution du processus : ainsi un facteur identifié, en principe, comme anodin et donc peu déterminant, peut s'avérer dans certaines circonstances, jouer dans l'évolution de l'objet, un rôle déterminant.

2- La dimension fractale :

Depuis toujours, les mathématiques raisonnent dans un univers euclidien composé de formes parfaites et lisses: droites, plans, cubes, sphères, etc. Pourtant, regardons au tour de nous, demande Mandelbrot : *« Les nuages ne sont pas des sphères, les montagnes ne sont pas des cônes, et l'écorce n'est pas lisse, pas plus que l'éclair ne se propage en ligne droite»*[7].

Une notion a été oubliée, la rugosité, et celle-ci *« n'est pas une imperfection perturbant un quelconque idéal, c'est l'essence même de bien des objets dans la nature – comme en économie»*[8].

En géométrie euclidienne, on admet uniquement deux dimensions : la dimension 2 qui correspond à la géométrie plane et la dimension 3 qui correspond à la géométrie dans l'espace.

La géométrie plane peut être caractérisée par une fonction du type : y= f(x) ; la géométrie dans l'espace peut être caractérisée par une fonction du type z = f(x, y).

On devrait en déduire que toute figure inscrite dans un plan présente une dimension égale à 2 et que la surface d'un objet tridimensionnel présente une dimension égale à 3.

Exemple :

Considérons le segment [0, 1]. Il peut être pavé par exactement N = n parties de la forme [(h-1)/n, h/n]. Chaque partie de longueur 1/n est homothétique au segment initial dans le rapport r(N) = 1/n.

---

[7] Benoit Mandelbrot. U*ne approche fractale des marchés.* Odile Jacob. 2005. Page 146
[8] Benoit Mandelbrot. U*ne approche fractale des marchés.* Odile Jacob. 2005. Page 147

• Considérons le rectangle [0, X] × [0, Y]. Il peut être pavé par exactement $N = n^2$ parties de la forme [(h-1)X/n, hX/n]. Chaque partie d'aire XY/n^2 est homothétique au rectangle initial dans le rapport r(N) = 1/n.

• On généralise sans peine au cas du parallélépipède qui est pavé par $N = n^3$ parties homothétiques au tout dans le rapport r(N) = 1/n .

• Dans ces trois cas, on voit que la dimension peut être donnée par la formule :

$$D = -\frac{\ln(N)}{\ln[r(N)]} = \frac{\ln(N)}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)}$$

Hausdorff[9] a montré (et calculé) que certains objets de nature présentent une structure qualifiée par la suite par Mandelbrot de structure fractale et qu'en conséquence leur dimension n'est pas euclidienne.

Les travaux de Hausdorff ont été repris et approfondis par Mandelbrot dans sa théorie des fractales.

3- La dimension fractale et l'exposant de Hurst :

Dès le début des années 1960, Mandelbrot remit en cause les fondements mêmes de la modélisation en finance de marché (recours à la loi normale de Gausse) ; il développa une approche fractale des marchés en utilisant l'exposant de Hurst ; par la suite il généralisa son approche en

[9] Hausdorff. Mathématicien allemand (1868-1942)

développant une approche multi-fractale (et en substituant à l'exposant de HURST la dimension de Hausdorff).

Mandelbrot avait étendu à la dimension temporelle qui caractérise les marchés financiers l'approche fractale qui, jusque-là, était réservée à des phénomènes naturels observables (dimension spatiale).

Le temps fractal est caractérisé par deux phénomènes :

- un *« effet Joseph »* en vertu duquel les « choses ont tendance à se répéter »
- un *« effet Noé »* en vertu duquel des sauts *« Jumps »* interviennent sur les marchés de manière apériodique.

Mandelbrot a remarqué que des phénomènes analogues se répètent avec des ampleurs différentes : cette observation justifie pleinement l'approche multi-fractale et la substitution de la dimension de Hausdorff à l'exposant de Hurst.

Ces phénomènes analogues ne se répètent pas de manière périodique (les laps de temps qui séparent ces phénomènes diffèrent d'une observation à l'autre) : le phénomène observé est bien apériodique.

Mandelbrot, ainsi appelé *« le père des fractales »*, a affirmé que la dimension fractale a un rapport avec l'exposant de Hurst tel que :

- D= 2 – H ; où D : dimension fractal, H : exposant de Hurst

Et pour le calcul de de H, il a proposé une statistique particulière qu'il a nommé « R/S[10] » tel que :

$$R.S = \frac{[\max_{1\leq k\leq n}\sum_{j=1}^{k}(r_j-\overline{r})]-[\min_{1\leq k\leq n}\sum_{j=1}^{k}(r_j-\bar{r})]}{\sigma_{r_j}}$$

[10] B. MANDELBROT. *Une approche fractale des marchés* ». Odile Jacob.2005. Page 322

$H = \frac{\log(R.S)}{\log(T)}$; Avec, T= nombre d'observations de la série, et $0 < H < 1$

4- L'aspect théorique de la statistique R/S et l'exposant H :

L'analyse R/S est une mesure de l'intensité de la dépendance globale de la série, il est vraiment important de déterminer l'existence d'une telle dépendance avant de commencer la modélisation des phénomènes économiques.

Les processus gaussiens nient l'existence de toute sorte de dépendance temporelle entre les variables aléatoires, car ils utilisent des outils statistiques impliquant que le mouvement converge vers une la loi normal ou vers une variable qui est gaussienne.

Dans la section précédente, j'ai parlé du mouvement brownien tel que les accroissements $\Delta x \sim \sqrt{\Delta t} = \Delta t^{\frac{1}{2}}$, on remarque que le temps est invariant d'échelle d'exposant H=1/2.

De ce point, Mandelbrot a conclu dans ses travaux en 1963 en suite en 1965 que : $\Delta x \sim \Delta t^{H}$, où l'exposant $0<H<1$, est encore invariant du temps mais $H \neq 1/2$, et d'après la relation entre R/S et H, on peut dire que chaque série possède sa propre dimension fractale.

CONCLUSION :

L'approche normale et l'approche fractale s'opposent dans presque toutes leurs hypothèses de base, mais contrairement à la première, la deuxième semble plus adéquate avec la réalité des marchés.

L'approche fractale se base sur la dépendance temporelle des variables de la série observée, la discontinuité assez présente, et la notion d'invariance d'échelle.

CHAPITRE III : ETUDE DE CAS ET SIMULATION DES PROCESSUS

SECTION I : PRESENTATION DE L'ORGANISME D'ACCEUIL :

1- présentation de l'entreprise INERGA :

1-1 Historique :

Créée par SONELGAZ (Société Nationale d'Electricité et du Gaz) en 1979 en tant qu'unité de génie civil "KC", elle avait pour mission de contribuer à réaliser les infrastructures électriques et immobilières inscrites dans son propre programme d'investissement. A la faveur des réformes économiques mises en œuvre en Algérie à compter de 1982 :

- L'unité KC est érigée en Entreprise de Réalisation d'Infrastructures Energétiques (dénommée en abrégé INERGA), le 1er Janvier 1984 (cf. décret N° 83- 681 du 29 octobre 1983), dépendant du Ministère de l'Energie et des Mines.

- INERGA obtient son autonomie, à compter du 03 mars 1990, en devenant Entreprise Publique Economique, Société par Actions (EPE/spa). A ce titre, elle est régie par le code du commerce et dotée d'organes de délibération (Assemblée Générale) et d'administration (Conseil d'Administration). Son capital est détenu entièrement par l'Etat.

- En janvier 2006, INERGA réintègre Sonelgaz et devient filiale.

Relativement jeune, INERGA a réussi, en une courte période de temps (une vingtaine d'années d'âge), à compter parmi les plus importantes entreprises Algériennes dans son domaine.

1-2 Présentation :

INERGA est société de réalisation d'infrastructures, filiale de Sonelgaz. C'est une Société Par Actions, d'un capital social de 350 000 000 DA. INERGA est l'une des plus grandes entreprises nationales de construction spécialisée dans le domaine des réalisations d'infrastructures à caractère énergétique, industriel et immobilier. INERGA est chargée de :

- Etudier et réaliser les infrastructures d'ouvrages énergétiques et leurs annexes, à savoir, les travaux de :

  - Génie civil industriel, notamment à caractère énergétique.

  - Voieries et réseaux divers.

  - Eventuellement, tous corps d'état secondaires.

- Mener, d'une manière générale, toutes les opérations commerciales, industrielles, mobilières, immobilières et financières inhérentes à ses activités et de nature à favoriser son développement.

  - Adresse du Siège Social :

Route Nationale N°01- B.P.104 Boufarik.

INERGA active sur l'ensemble du territoire national, elle est représentée :

- Au centre
- à Boufarik par son Siège Social
- à Blida par une Direction Logistique
- **à Rouiba par l'Unité Préfabrication**
- Région Ouest à Oued Tlelat (wilaya d'Oran)
- Région Sud à Hassi-Messaoud (wilaya d'Ouargla)
- Région Est à Ain Mlila (wilaya d'Oum el Bouaghi)

1-3 Domaine d'activité de l'entreprise :

Il est diversifié :

- Réalisation d'infrastructures et ouvrages à caractères énergétiques et industriels
- de bâtiments, de travaux de terrassement, de génie civil, de voirie et réseaux divers.

1-4 Les valeurs de l'entreprise :

La réussite d'INERGA repose sur la capacité de ses équipes à relever les plus grands défis, tout en respectant les exigences de résultat qu'elle s'impose. Cette culture trouve ses fondements dans les valeurs suivantes :

- La confiance et l'honnêteté :

INERGA n'accepte ni dérive, ni négligence quand il s'agit de respect des exigences explicites ou implicites. De plus, avec ses Clients, INERGA cherche à dépasser les relations économiques Client -Fournisseur, en vue de privilégier la dimension noble qu'est l'honnêteté.

- Le sérieux, la discipline, le respect et la considération de l'autre :

Que cela soit en interne ou en externe, chaque partenaire est traité avec égard dans un esprit imprégné de discipline et de respect de l'organisation et de ses règlements. Se considérant, par ailleurs, comme une entreprise sérieuse, INERGA cultive cette valeur à tous les niveaux. Ses Clients peuvent compter sur elle pour réaliser leurs projets.

- Le respect des engagements :

Quelles que soient les conditions, les engagements d'INERGA sont tenus. Dès lors que le Client confie à INERGA un projet à réaliser, et que les règles sont bien définies au préalable, celui-ci a l'assurance que ses exigences sont satisfaites.

- La reconnaissance des efforts et la fierté d'appartenir à INERGA :

Considérer les hommes et les femmes d'INERGA dans toutes leurs dimensions : professionnelle, affective et sociale. Se distinguer par des efforts exceptionnels ne doit passer sans une reconnaissance formelle qui fait connaître l'auteur et lui témoigner reconnaissance. Avoir le souci de développer de ses capacités et les motiver est un motif de fierté et développement de la solidarité.

1-5 Les qualités de l'entreprise :

La satisfaction du Client et la qualité de ses prestations sont au centre de toutes les préoccupations d'INERGA. Cela est d'autant plus évident et important qu'elle a réuni, en plus, toutes les conditions pour que son système qualité soit reconnu capable de répondre aux exigences de la norme ISO 9002/1994, par AFAQ Ascert International depuis le 15 Décembre 1999.

A vrai dire, la diversification de ses Clients, nationaux et étrangers, tous de renom et aussi exigeants les uns que les autres, est à l'origine de la volonté de l'Entreprise d'effectuer ce saut qualitatif, en optant, en 1998, pour une démarche qualité qui a débouché sur la certification de son système assurance qualité. Ainsi, INERGA est la seconde Entreprise algérienne et la première dans son secteur à obtenir le certificat ISO 9002/1994. Emboîtant le pas à la norme dans sa version 2000, INERGA a fait évoluer son Système d'Assurance de la Qualité (SAQ) à un Système de Management de la Qualité (SMQ).INERGA a obtenu la certification de son Système Management Qualité selon le référentiel ISO9001 version 2000 depuis le 15 septembre 2003.

Le pilotage de son SMQ est fondé sur une démarche basée, d'une part, sur un pragmatisme forgé par l'expérience et le souci d'efficacité des processus, et, d'autre part, par une vision et des orientations claires et simples de la Direction Générale, comme énoncé dans la déclaration (Politique Qualité) du Président Directeur Général. Cette dernière est axée sur :

- La satisfaction du client.
- La valorisation de l'homme au travail.
- La garantie de la maîtrise des processus et de leur amélioration.
- L'esprit de partenariat entre l'Entreprise, le Personnel, ses Clients et ses Fournisseurs.

Sur le même sillage, une démarche HSE est en cours ayant pour objectif d'ancrer davantage chez le Personnel, déjà bien imprégné par cet esprit, les réflexes liés à la santé et sécurité au travail. Les résultats enregistrés dans ce domaine sont très encourageants et ont valu à INERGA de nombreuses distinctions par ses Client.

1-6 Formation continue :

Consciente que la formation est l'un des facteurs essentiels de développement et de changement, INERGA s'est lancé le défi d'améliorer en permanence la qualification de sa Ressource Humaine qui constitue sa principale richesse.

Les objectif(s) généraux consacrés à la formation sont principalement :

- Consolidation et capitalisation des savoirs
- Développement des savoirs faire individuels et collectifs
- Promotion des savoirs être au profit de la collectivité et des clients tant internes qu'externes.

Les objectifs du développement par le biais de la formation que l'entreprise espère atteindre, sont particulièrement:

1. Perfectionnement de l'encadrement de l'Entreprise pour lui permettre de mener au mieux possible ses missions

- apport de solution à la planification et concrétisation de la mission de l'organisation,
- augmentation de l'efficacité et de l'efficience de l'organisation (performance, qualité, polyvalence, santé et sécurité).

2. Amélioration du niveau de qualification du Personnel de supervision des travaux de chantier.

3. Perfectionnement régulier du Personnel de base activant sur chantier (personnel productif).

4. Valorisation du potentiel du Personnel dans son adaptation au travail dans le développement de sa carrière,

5. Contribution à l'effort de l'Entreprise dans la résolution du problème de relève.

1-7 Ressources humaines :

C'est, sans doute, la ressource la plus précieuse dont dispose INERGA. Douée d'une adaptabilité remarquable et possédant un savoir-faire qui lui permet de valoriser toutes les autres ressources. Elle est composée d'un noyau dur capable d'encadrer toutes les catégories de Personnel, dans toutes les spécialités techniques et de management.

En moyenne, l'Entreprise emploie 2300 Agents dont 75 % ont des relations de travail à durée déterminée (CDD).

Pour être en mesure d'épouser le plan de charge, sans cesse évolutif et diversifié, INERGA s'est organisée de façon à rendre ses structures et ses équipes flexibles et adaptables.

Elle a mis en place un système de recrutement rigoureux qui s'appuie sur une sélection basée sur des exigences claires, et favorise l'émergence de compétences grâce à des évaluations régulières et une formation permanente touchant toutes les catégories.

Enfin, INERGA dispose d'un fichier de compétences mobilisables en fonction des besoins exprimés par les différentes activités.

Particulièrement, pour son encadrement, l'Entreprise organise annuellement une "Conférence des Cadres" qui constitue un espace d'échange, d'information, de réflexion, de propositions, de connaissance mutuelle des membres de cette catégorie qui se regroupent dans une structure hôtelière où l'ambiance amicale et de travail se côtoient.

S'agissant des activités socioculturelles, INERGA dispose d'un Service, fonctionnant grâce à un budget spécial, chargé d'organiser des vacances pour l'ensemble des Travailleurs et leurs enfants, des activités sportives et de détente, des actions d'aide à certaines familles en difficultés, des prêts sociaux, etc.

1-8 Moyens matériels :

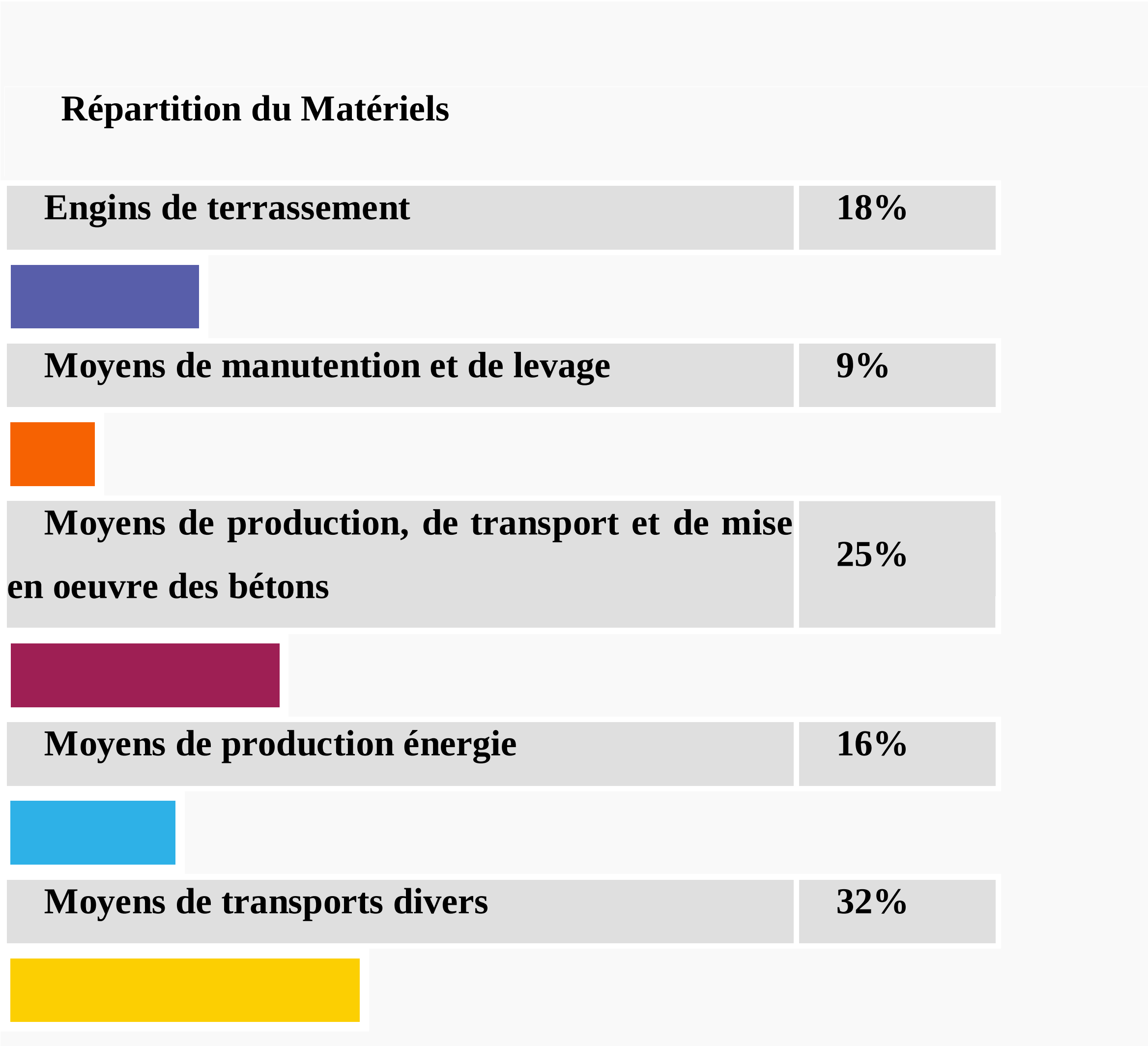
D'année en année, les matériels d'INERGA connaissent, non seulement, une évolution du parc, mais aussi et surtout, une capacité croissante grâce à un renouvellement régulier et à une adaptation aux exigences des activités.

Des programmes d'investissement engagés ces dernières années ont renforcé considérablement la "force de frappe" de sa logistique, qui l'ont rajeunie sensiblement, et, n'ont pas manqué d'influer manifestement sur les taux d'immobilisation.

En plus de sa flotte très diversifiée composée des moyens, ci-après, INERGA gère un fichier appréciable de fournisseurs de véhicules et engins mobilisables à tout moment.

Ayant développé, avec ces Fournisseurs, des relations de partenariat, ces moyens sont devenus comme un véritable prolongement de la logistique de l'Entreprise.

Les moyens propres d'INERGA sont composés de :



-Figure 3-

2- Présentation De l'unité Objet De Stage :

2-1Mission de l'Unité Rouiba :

Servir la fonction réalisation de l'entreprise :

1. En menuiserie bois bâtiment
2. En menuiserie métallique
3. En menuiserie aluminium
4. Façonnage des aciers

L'Unité n'a pas de caractère strictement régional, elle a pour vocation de soutenir tous les projets de l'entreprise quel que soit leur emplacement géographique.

A ce titre les principales attributions sont résumées comme suit :

- ✓ Achats / Approvisionnement du bois, métaux et quincaillerie.
- ✓ Gestion du matériel machines de menuiserie bois métallique et aluminium
- ✓ Maintenance des moyens de réalisation, ateliers de menuiserie, de ferronnerie de soudure, ferraillage.
- ✓ Administration du personnel d'unité
- ✓ Prestations de service à la demande pour clients hors entreprise
- ✓ Finances / comptabilité, gestion de la trésorerie de l'Unité

2-2 **Les Moyens De l'unité Rouiba :**

La valeur des infrastructures : La Valeur Vénale des infrastructures de l'unité est estimé de : 3. 453 227 327 DA

2-2-1 Les Moyens Matériels :

- **Composition de l'établissement :**

❖ deux zones distinctes :

1. Une zone d'administration et parc véhicules
2. Une zone technique des ateliers, magasins, et aires de stockage

Pour les emplacements des zones il y a lieu de se référer au plan de masse

1) **La zone d'administration et parc véhicule :** comprend :

- Une entrée principale bordée par une route nationale menant vers le centre ville Rouïba et vers la zone Industrielle
- Une entrée secondaire menant vers des ateliers
- Loge de garde en préfabriqué surélevé a trois (03) mètres de hauteur
- Parc véhicules
- Bureaux d'administration (construction en dur)
- Bureau d'administration (chalet en préfabriqué)
- Poste électrique sonelgaz 400 KVA
- Groupe électrogène de 400 KVA avec inverseur

2) <u>La zone des ateliers, magasins et aires de stockage :</u>

- Magasins outillage et quincaillerie
- Atelier de menuiserie bois
- Atelier de menuiserie aluminium
- Atelier de ferronnerie et soudure
- Atelier façonnage ferraillage abrité en charpente métallique
- Aire de stockage "à ciel ouvert"
- Aire de stockage "abrité".

2-2-2 Les Moyens Humain :

- **<u>Effectif de l'établissement :</u>**

- **Personnel étranger,** néant
- **Personnel algérien** L'effectif moyen d'administration et des ateliers est de 195 agents (13 permanents et 182 temporaires) le nombre varie en fonction du plan de charge.

3- Présentation du service objet de stage :

Service Planification :

L'unité de Rouiba est une unité de soutien de l'activité principale d'INERGA, mais en terme management, elle constitue ainsi une unité centre de profit disant seulement que son soutien à l'ensemble passe prioritaire devant sa clientèle externe, à ce fait, le service planification intervient afin de gérer la demande sur les services de l'unité, pour cela, le service a besoin de modéliser et de prévoir la demande future.

Mr.Chalabi, chef de service planification, statisticien de formation, aie souvent recours aux modèles statistiques gaussiens afin de réaliser des modélisations.

4- Importance de la recherche pour la mission du service :

Etant donné que le service doit en permanence faire des prévisions, et qu'en plus il est fortement lié à l'activité de l'ensemble, donc il doit gérer la demande externe selon cette contrainte, qui est liée évidemment à la contrainte de capacités productive de l'entreprise.

SECTION II : SIMULATION ET RESULTATS

1- Démarche de recherche :

Dans le deuxième chapitre, j’ai parlé d’une approche fractale des données financière, un concept dont le service n’en avait encore aucune idée, alors j’ai basé mon travail au début sur l’adéquation des modèles gaussiens avec les données financières dont le service disposait, en suite sur les tests des hypothèses de fractalité sur les mêmes données afin de d’arriver à une solution de ma problématique de recherche.

Les séries, A-1, A-2, A-3, en annexes, représentent les principales séries financières issues de la comptabilité générale au cours des 25 dernières années de l’activité de l’entreprise INERGA d’échantillon annuel.

La série A-1 représente l’évolution du chiffre d’affaire de l’entreprise INERGA entre 1989 et 2013, la série A-2 représente l’évolution de la valeur ajoutée durant la même période, la série A-3 représente l’évolution du résultat net de la société durant le même intervalle du temps.

A cause du manque de données avec de petit laps de temps, j’ai eu recours à des séries externes telles que la série A-4(annexes), qui représente un échantillon hebdomadaire des évolutions des prix de pétrole dans au sein du NYMEX.

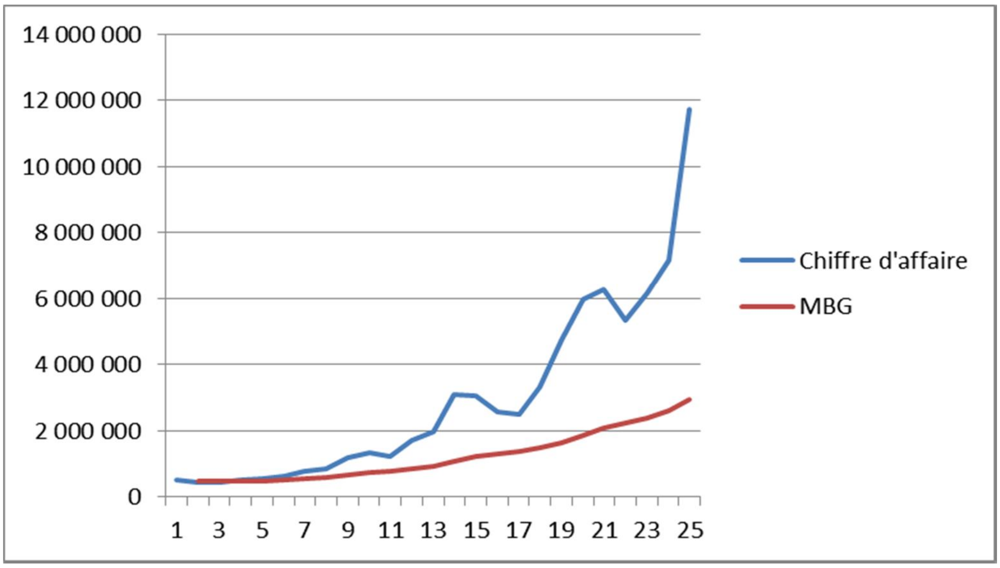
D’abord, je commencerai par une simulation des séries par un processus brownien, et je tenterai d’expliquer ce mouvement en termes de convergence et de relation de d’indépendance des variables.

Ensuite, j’entreprendrai la notion du temps fractal et d’invariance d’échelle des séries en essayant de les appliqué petit à petit, toute en remarquant le changement du comportement du processus, afin d’arriver à une conclusion pertinente pour ma problématique.

2- Simulation par un mouvement brownien géométrique et analyse des résultats :

2-1 Simulation de la série A-1 :

En simulant cette série par un mouvement brownien géométrique et en comparant ainsi les valeurs du processus à la réalité observée, j'ai obtenu le résultat suivant :



-Graph 1-(Détails de calcul tableau T-1-1, annexes)

On remarque clairement que :

- Le processus a la même tendance que la série.
- Le processus ne suit pas les mouvements de la série.

On remarque ainsi que la valeur espérée du mouvement converge vers une constante quand T tend vers l'infini tel que :

$$\lim_{t \to +\infty} E(X_T) = X_0 \,; car \lim_{t \to +\infty} \alpha = 0$$

Rappelons que $E(X_T) = X_0 * e^{\alpha T}$; $avec : \alpha\ le\ drift\ du\ processus$

Comme le mouvement brownien, tel que tous les processus gaussiens, suppose la continuité des variable à travers le temps, cette hypothèse ne lui permet pas de simuler les sauts d'une amplitude élevée, car :

Mathématiquement, si une fonction f est continue sur un intervalle de temps I, le passage d'une valeur à une autre pendant un laps de temps l implique le passage par toute les valeurs intermédiaires pendant le même laps du temps.

Donc, l'hypothèse de continuité empêche le processus de réaliser des sauts énormes.

D'autre part, le processus est fondé sur une approche normale, c'est-à-dire, une approche moyenne-variance, j'ai parlé de la distribution normale des valeurs dans la première section du premier chapitre, on sait que 68.2% des valeurs sont comprises entre plus ou moins 1 écart type, ainsi que 95.4% des valeurs sont comprises entre plus ou moins deux écarts types, ce qui justifie que le processus n'arrive pas à atteindre les valeurs qui se trouvent loin de la moyenne.

Dans le tableau suivant j'expliquerai :

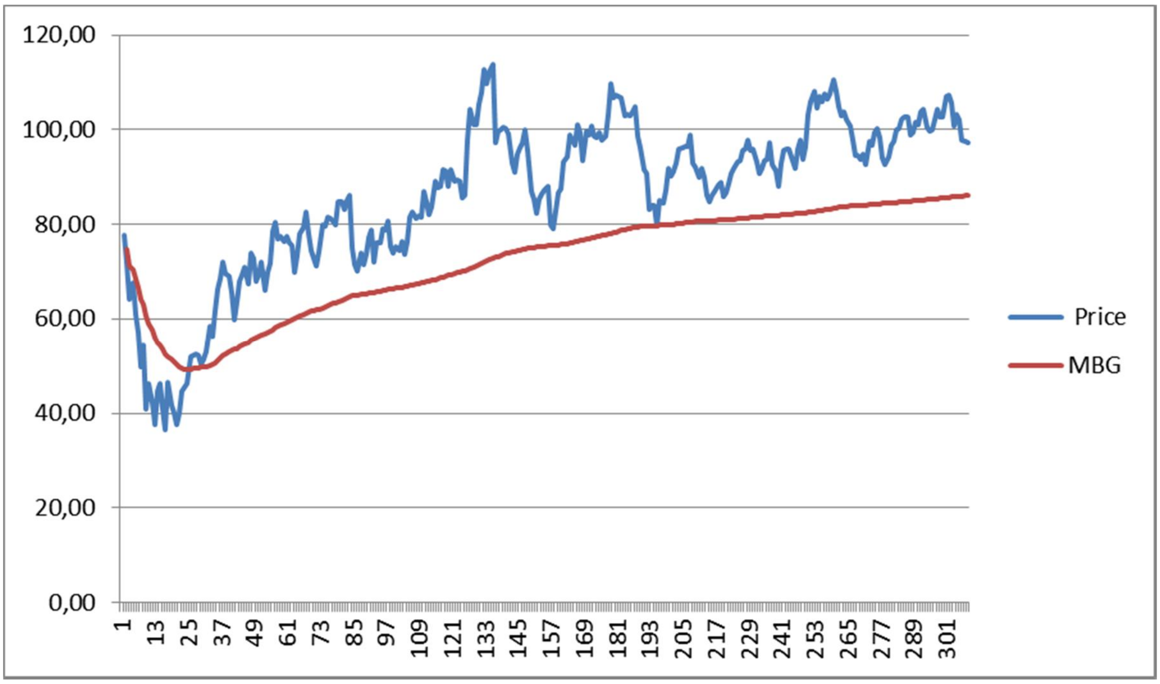
Si on élimine la dernière ligne du tableau T-1 du calcule :

La moyenne	2598006
L'écart type	2144007
Z > 11000000	Z^*= (Z-moyenne)/écart type
$P(Z^*>3.91)$	P=0.00005

Selon l'approche normale, on a 5 chances sur 100000 de voir un tel saut se produire, et comme le processus suit cette approche, il n'arrive pas à effectuer un tel changement de comportement.

En ajoutant la contrainte de continuité, un tel changement ne pourra se produire sauf s'il passe par toutes les valeurs intermédiaires durant le même laps du temps, ce dernier est peut être discutable concernant l'étude de cette série car il s'agit d'un $\Delta t = 1$ année, c'est la raison pour laquelle j'ai effectué les mêmes tests sur la série A-4.

2-2 Simulation de la série A-4 :



-Graph 2- (Détails de calcul tableau T-4-1, annexes)

Dans ce cas, l'intervalle du temps est très court par rapport au premier, il s'agit de fluctuation hebdomadaire des prix.

Le processus sauvegarde la tendance de la série, mais les valeurs qui sont statistiquement loin de la moyenne restent toujours aussi loin de son champs de manœuvre, tandis que, ce sont les valeurs que j'ai qualifié dans les sections précédentes d'extrêmes qui ont le plus d'impact qu'il soit positif ou négatif.

Prenant l'exemple d'un portefeuille d'actions, c'est la présence de ces valeurs, dites tellement rares, qui fait que l'investisseur subisse une perte énorme ou tire profit énorme, ainsi le cas des spéculateurs et des assurances.

3- Vers un champ fractal :

On a pu constater jusqu'à maintenant que le mouvement brownien géométrique, comme tous les processus ayant une approche normale, n'est pas adéquat à des phénomènes qui sort de l'ordinaire, à cause de l'absence des discontinuités qu'il présuppose, ainsi que l'indépendance des variables aléatoires.

Dans la suite, je vais supposer le contraire de ce que prétend le modèle gaussien, et je vais soumettre le mouvement brownien à de nouvelles hypothèses :

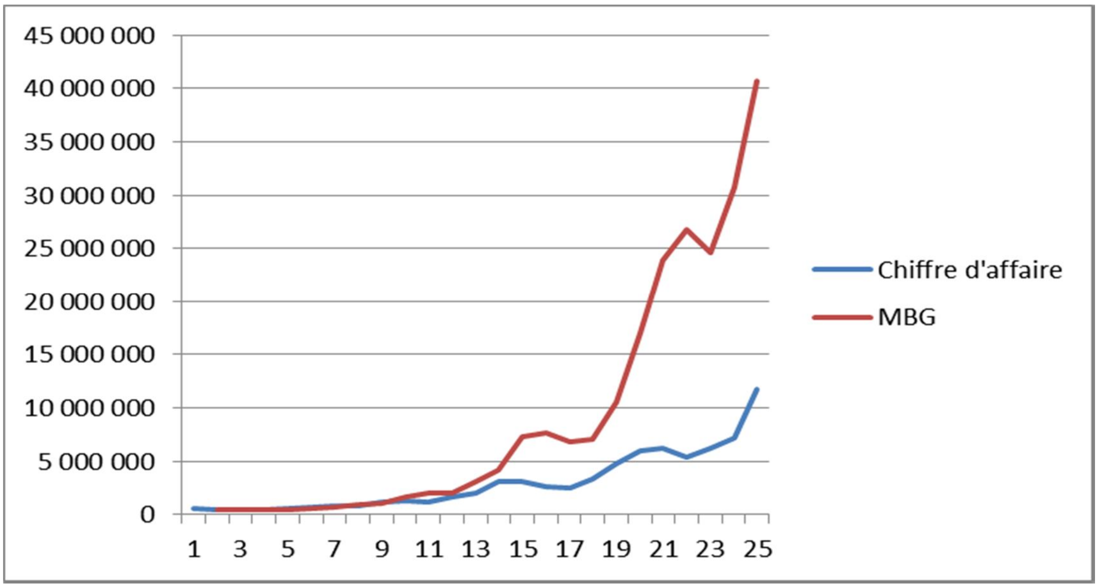
- Les variables sont dépendants.
- La discontinuité est assez fréquente.
- Le temps est invariant d'échelle H ; H : paramètre de Hurst

3-1 La dépendance et la discontinuité :

J'ai déjà expliqué que la valeur espérée du processus brownien géométrique tend vers la valeur initiale de la série quand le temps T tend vers l'infini, maintenant, en voulant obtenir un processus avec des variables dépendantes et une valeur espérée qui tend vers une variable aléatoire, j'ai remplacé X_0 par X_{t-1} dans la formule du mouvement, c'est-à-dire :

- $E(X_T) = X_{t-1} * e^{\alpha T}$ …. (1)

La formule précédente est une formule de récurrence, dont l'impact sur la série A-1 était le suivant :



-Graph 3-(Détails de calcul tableau T-1-2, annexes)

D'après les résultats obtenus, on constate que :

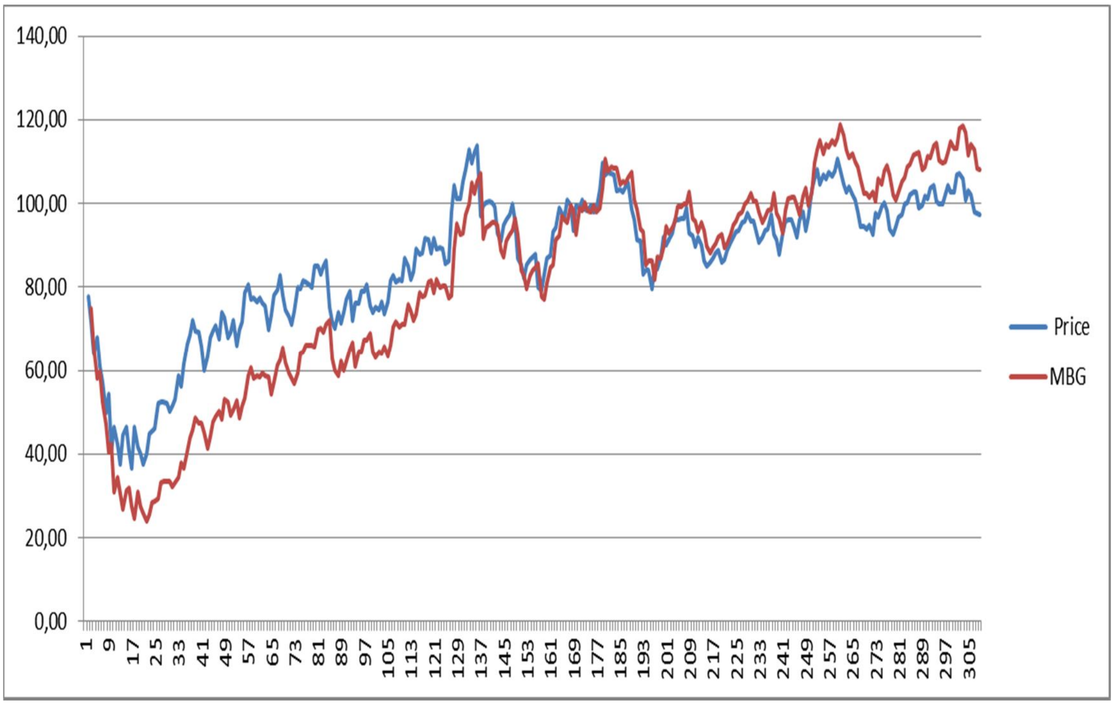
- La discontinuité s'est présentée dans le processus.
- Les variables du modèle sont fortement liées.

- Le modèle présente une tendance exponentielle par rapport à celle de la série.

En plus, la relation de récurrence converge vers une variable aléatoire qu'elle n'est pas gaussienne selon les hypothèses tel que :

- $lim_{t\to+\infty} E(X_T) = X_{t-1}\,; car\ \ lim_{t\to+\infty}\,\alpha = 0$

En appliquant la même relation aux variables de la série A-4 on obtient :



-Graph 4-(Détails de calcul, tableau T-4-2, annexes)

Pour un échantillon de données assez grand, et laps de temps assez petits, on peut voir que la relation simule les changements de comportement des valeurs de la série, avec un petit problème, l'ampleur des variations.

La fractalité et l'invariance d'échelle :

Dans la première section du deuxième chapitre, j'ai parlé du mouvement brownien simple qui est la base des tous les processus browniens, dans celui-ci, les accroissements Δx dans un petit intervalle de temps Δt tendent vers $\Delta t^{1/2}$, et dans la deuxième section du même chapitre, j'ai parlé des travaux de Mandelbrot dans lesquels il a conclu que : $\Delta x \rightarrow \Delta t^{H}$; où H est l'exposant de Hurst et $0 < H < 1$.

Par la suite, je vais tenter d'appliquer cette approche de temps invariant d'échelle H à la relation récurrente (1).

La relation (1) est composée de deux éléments, le premier est la variable aléatoire non-gaussienne X_{t-1} et le second s'agit de e^{at} ; où (a) désigne le drift du processus.

J'ai déjà mentionné que le drift (a) est égal :

$$\alpha = \frac{\ln\left[\frac{E[x(T)]}{x(0)}\right]}{T}$$

Et on a déjà vu que la relation récurrente (1) simule les variations dans le cadre des séries A-1 et A-4 mais avec des drifts d'amplitudes importantes que celles des valeurs réelles, donc par la suite je vais introduire la notion d'invariance d'échelle du temps à un seul niveau celui de drift pour ne pas amplifier les variations du processus.

Donc, le drift devient :

$$\alpha = \frac{\ln\left[\frac{E[x(T)]}{x(0)}\right]}{T^{H}}$$

Et la relation (1) devient :

$E(X_T) = X_{t-1} * e^{a}$ …(2)

D'après les calculs présentés dans le tableau (T-1-3, annexes), en utilisant la statistique R/S, on peut identifier pour la série A-1 un exposant de Hurst :

H=0.70806

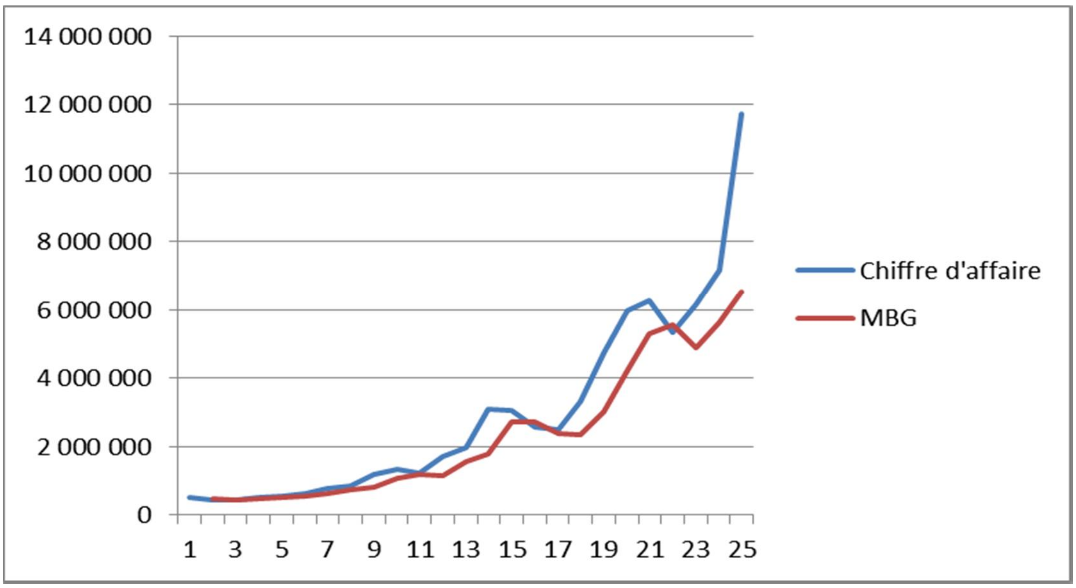
Ce qui veut dire selon Mandelbrot que la dimension fractal de la série est :

D= 2 – H = 1.29

Ces deux paramètres servent à mesurer le degré d'irrégularité.

Pour la série A-1, le degré d'irrégularité est assez important (0.5<H<1) pour être mesurer dans une dimension euclidienne.

La simulation de la Série A-1 selon la relation (2) donne :

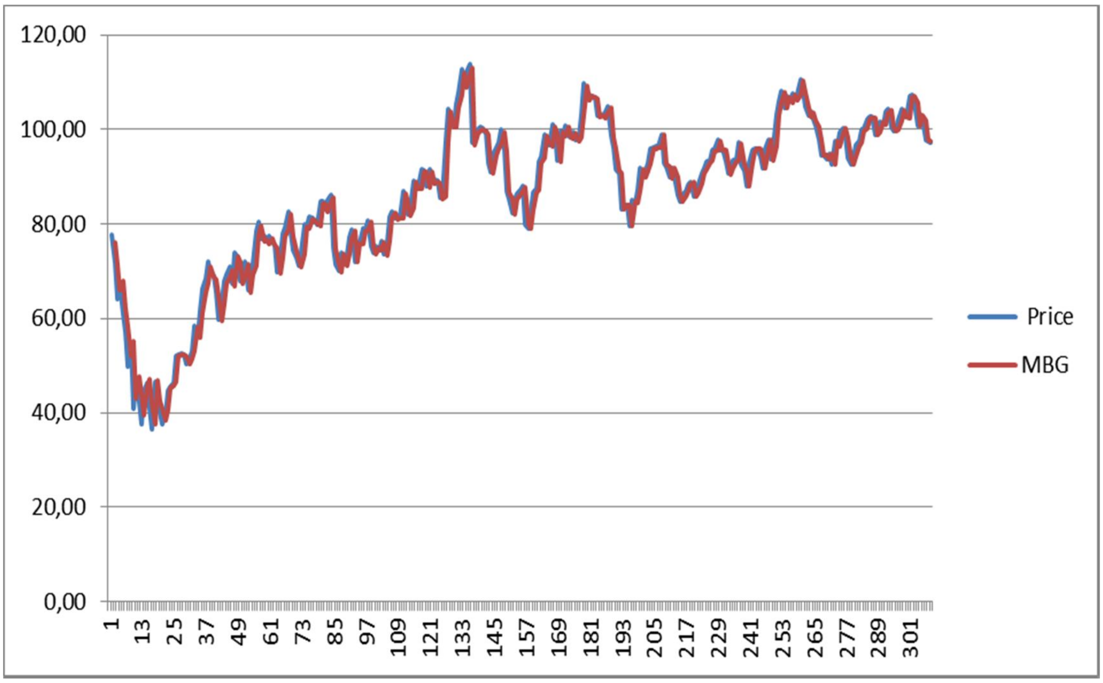


-Graph 5- (Détails de calcul, tableau T-1-3, annexes)

On remarque que :

- La relation (2) simule les fluctuations de la série A-1
- L'amplitude des variations est corrigée avec la notion d'invariance d'échelle du temps.

En appliquant la relation (2) sur la série A-4, on peut avoir :



-Graph 6- (Détails de calcul, tableau T-4-3, annexes)

Pour une grande série de données ayant des petits laps du temps, on constate :

- Les trajectoires sont rectifiées.

- Les amplitudes des drifts correspondent de plus en plus aux variations des valeurs de la série.
- La relation récurrente (2) sauvegarde la tendance et la périodicité de la série.

On peut dire que la notion du temps invariant d'échelle avait un impact sur l'évolution des trajectoires simulées des séries, et en conclure que les séries financières, malgré leur caractère qui semble aléatoire et irrégulier, possède une certaine régularité dans l'ensemble des trajectoires.

Cette *régularité dans l'irrégularité* est mesurée par un facteur temps invariant d'échelle d'exposant H.

CONCLUSION GENERALE :

Partant de la problématique, et en s'appuyant sur les hypothèses de la recherche, j'ai essayé d'apporter un maximum d'information portant sur la modélisation mathématique en générale, et principalement l'approche normale de modélisation en finance.

En réalisant ce mémoire et en discutant avec mes collègues, j'ai pu constater que le problème ne réside pas seulement dans l'utilisation de la loi de gausse au sein du paradigme de la finance, mais encore dans le fait que sont rares les gens qui ont conscience de ces limites désastreuses.

Tous les cadres formés au sein des écoles de commerce ou des universités sont dressés avec cette approche, c'est d'ailleurs pourquoi j'ai eu tant de difficultés afin de réaliser –partiellement- ce qui devrai être fait.

Dans un monde plein de crises, la loi normale nous rassure, et même si la situation s'aggrave encore, elle continue de nous rassurer, car, elle se base sur deux paramètres qui sont loin d'être suffisants à la description des phénomènes en finance notamment.

Avant d'utiliser un modèle mathématique, il faut être conscient de ses limites, j'espère juste qu'avec le peu qu'il contient, ce mémoire aidera le lecteur, le service objet de mon stage et les étudiants surtout, à être vigilants en ayant recours aux modèle Gaussiens.

Enfin, j'aimerai avoir l'occasion de continuer cette recherche et d'aller plus loin, car, pour moi elle ne constitue qu'un premier pas vers la compréhension des phénomènes de cette discipline.

BIBLIOGRAPHIE :

1- Argentine Vidal, *statistique descriptive et inférentielle avec Excel*, presse universitaire de Renne, Renne, 2004.

2- Arthur, Brian W, *Increasing Returns and Path Dependence in the Economy*, University of Michigan Press, 1994

3- Bayer & Hans Christian, *Information: The New Language of Science*, Orion Book. London. 2003.

4- Benjamin Legros, *mathématique pour la gestion*, Dunod, Paris, 2011.

5- Benoît Mandelbrot, *The Variation of Certain Spéculatives Prices*, Journal of Business, 1962.

6- Benoit Mandelbrot. U*ne approche fractale des marchés*. Odile Jacob. 2005.

7- Bernard Bru, *La courbe de Gauss ou le théorème de Bernoulli raconté aux enfants*, MSH, 2006.

8- Chehrit Kamal, *dictionnaire des termes de finance*, grand-Alger livres, Alger, 2006

9- Didier Schlacther, *comprendre la formulation mathématique en économie*, Hachette, paris, 2011.

10- Franck Jedrzejewski, *modèles aléatoires et physique probabiliste*, springer, paris, 2009.

11- François Pantigni, *mathématiques dans le contexte, ellips*es, paris 2008.

12- François-Eric Racicot et Raymond Théoret, *finance computationnelle et gestion des risques*, presse de l'université de Québec, Québec, 2006.

13- Huyèn Pham, *optimisation et contrôle stochastique appliqué à la finance*, springer, paris, 2005.

14- John Burr Williams, *theory of investment value*, Fraser Publishing, 1938

15- Jonathan Berk et Peter DeMarzo, *finance d'entreprise*, Pearson éducation, France, 2011.

16- Michel Benaim et Nicole el Karoui, *promenade aléatoire*, les éditions de l'école polytechnique, paris, 2007.

17- Nassim Nicholas Taleb, *le cygne noir*, Belles Lettres, Paris, 2008.

18- Pierre Brémaud, *initiation aux probabilités et aux chaines de Markov*, springer, paris, 2004.

LISTING :

Liste des figures :

Figure 1 : la courbe de Gausse.

Figure 2 : distribution des probabilités selon l'approche normale.

Figure 3 : répartition des moyens matériels.

Liste des tableaux :

Tableau 1 : Interprétation du concept de la corrélation

Tableau 2 : bilan en valeur du marché

Liste des graphes :

Graph 1 : simulation des valeurs espérées d'un brownien géométrique de la série A-1

Graph 2 : simulation des valeurs espérées d'un brownien géométrique de la série A-4

Graph 3 : simulation de la série A-1 avec prise en compte de la discontinuité

Graph 4 : simulation de la série A-4 avec prise en compte de la discontinuité

Graph 5 : simulation de la série A-1 avec prise en compte des hypothèses de fractalité.

Graph 6 : simulation de la série A-4 avec prise en compte des hypothèses de fractalité.