RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE
ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Ecole Supérieure de Commerce, Koléa-Tipaza-Algérie
Département de Classes Préparatoires

Cours d'Analyse 3 avec Exercices Corrigés

Mekkaoui Mohammed

Table des matières

Notations

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons les notations suivantes :

1. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$: ensemble des nombres entiers naturels.
2. $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \cdots\}$: ensemble des nombres entiers naturels non nuls.
3. $\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels.
4. $\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes.
5. $\Gamma(x)$ désigne la fonction Gamma d'Euler.
6. $\beta(p, q)$ désigne la fonction Bêta d'Euler.

Préface

Cet ouvrage intitulé "Cours d'Analyse 3 avec Exercices Corrigés" est destiné aux étudiants de deuxième année universitaire des classes préparatoires en sciences économiques, commerciales et sciences de gestion. Il couvre en deux chapitres le programme pédagogique de la troisième semestre des classes préparatoires en analyse mathématiques. Il donne aux étudiants les outils nécessaires concernant les convergences des séries numériques et des intégrales impropres. À la fin de chaque chapitre se trouve une sélection d'exercices types avec corrigés, rédigés de manière détaillée pour permettre à l'étudiant de se familiariser avec les nouvelles notions et de contrôler l'assimilation correcte des points essentiels.

Le niveau mathématique requis est celui de la première année préparatoire : limites, continuité, dérivabilité, développements limités, suites réelles et complexes, intégrales, fonctions spéciales.

On introduit dans le premier chapitre, le concept de série numérique. Cette notion permet l'étude du phénomène de sommation infini discrète, permet également la définition de nouvelles fonctions, l'objectif de ce chapitre est de savoir étudier la nature d'une série numérique, et effectuer un calcul de somme.

Le deuxième chapitre est consacré aux intégrales impropres (généralisées). Plus précisément, nous présentons une généralisation de la définition de l'intégrale des fonctions pas nécessairement continue sur intervalles non compacts. En conclusion de ce chapitre, nous présentons quelques fonctions définies par une intégrale impropre.

Chapitre 1

Séries numériques

Le procédé qui consiste à additionner infiniment de quantités différentes à partir d'une quantité initiale apparait dans plusieurs disciplines : physique, informatique, statistique, finances, . . . etc.
L'idée de base d'une telle sommation infinie discrète donnant une valeur finie a été considérée paradoxale pour les mathématiciens pendants plusieurs siècles, jusqu'à l'introduction de l'idée de limite et la tentative de donner à celle-ci une définition rigoureuse. Depuis les séries infinies n'ont cessé d'attirer l'attention des mathématiciens et ont pu achever un grand développement.

Objectifs du chapitre

- Savoir étudier la nature d'une série numérique.
- Effectuer un calcul de somme.

1.1 Rappel sur les suites numériques

1.1.1 Définitions et propriétés

1.1 Définition (Suite numérique)

Une suite numérique est une fonction à valeurs réelles, dont l'ensemble de définition est l'ensemble $\mathbb{N}$ *des entiers naturels.*

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u(n) = u_n, \end{aligned}$$

notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ou* $(u_n)_n$.
u_n *s'appelle le terme général de la suite* $(u_n)_n$.

1.2 Définition (Convergence)

Une suite $(u_n)_n$ *est dite convergente vers une limite* ℓ *si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n \geq N_\epsilon \Rightarrow |u_n - \ell| < \epsilon$$

et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
$(u_n)_n$ *est dite divergente si elle ne converge pas.*

1.1 Propriétés

1. *Si la limite d'une suite existe, elle est unique.*
2. *Toute suite converge est bornée.*
3. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$*, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$ *mais la réciproque est fausse.*
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ *si et seulement si* $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$.
5. *Une suite réelle croissante et majorée converge.*
6. *Une suite réelle décroissante et minorée converge.*

1.1.2 Suite de Cauchy

1.3 Définition (Suite de Cauchy)

On dit que $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall p, q \in \mathbb{N},\quad p > q \geq N_\epsilon \Longrightarrow |u_p - u_q| < \epsilon.$$

1.1 Proposition

Une suite $(u_n)_n$ converge si et seulement si elle est de Cauchy.

1.1.3 Suite extraite

1.4 Définition (Suite extraite)

Une suite extraite (ou une sous-suite) de $(u_n)_n$ est une suite de la forme $u_{\varphi(n)}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante.

1.2 Proposition

Si $(u_n)_n$ converge vers ℓ, toute sous-suite de $(u_n)_n$ converge vers ℓ.

1.1 Corollaire

La proposition précédente est utile sous sa forme contraposée. C'est à dir, si on a deux sous-suite de $(u_n)_n$ qui ont des limites différentes, la suite $(u_n)_n$ diverge.

Exemple 1.1 Soit la suite $(u_n)_n$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$.
La sous-suite $u_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \longrightarrow 1$.
La sous-suite $u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 \longrightarrow -1$.
$-1 \neq 1$, donc la suite $(u_n)_n$ diverge.

1.2 Généralités sur les séries numériques

1.2.1 Définitions et propriétés

1.5 Définition (série numérique)

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique. On appelle série numérique de terme général u_n, et on note $\sum u_n$, la suite des sommes partielles $(S_n)_n$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k.$$

1.6 Définition (Convergence)

On dit que la série numérique $\sum u_n$ converge vers S, si la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ converge vers S, qui est appelée somme de la série et on note

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} S_n = S.$$

Exemple 1.2 Soit la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(n+1)},\ n \in \mathbb{N}^*$.
On peut écrire après décomposition en élément simples

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

d'où

$$\begin{array}{rcl} S_n & = & u_1 + u_2 + ... + u_n \\ & = & \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ & = & 1 - \frac{1}{n+1} \end{array}$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1.$$

Donc la série $\sum u_n$ est convergente et on a $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$.

Exemple 1.3 Série géométrique : Une série géométrique est une série dont le terme général est de la forme $u_n = aq^n,\ a \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$. Pour ce type de série, le calcul de la somme partielle est donné par la forme suivante :

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + ... + u_n \\ &= \begin{cases} \frac{a(1-q^{n+1})}{1-q} & \text{si} \quad q \neq 1, \\ a(n+1) & \text{si} \quad q = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

On remarque ainsi que $(S_n)_n$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas la série géométrique converge et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}.$$

Exemple 1.4 Soit la série de terme général $u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}^*$.
On a :

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + ... + u_n \\ &= \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + ... + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times ... \times \frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1), \end{aligned}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty.$$

$(S_n)_n$ est divergente, d'où la divergence de la série $\sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

Remarque 1.1 Si $u_n = a_{n+1} - a_n$ on trouve que $S_n = a_{n+1} - a_0$, alors la série de terme général u_n converge si et seulement si la suite $(a_n)_n$ converge.

1.3 Proposition (Linéarité)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes, de sommes respectives S et T. Alors

1) *La série $\sum(u_n + v_n)$ est convergente et on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = S + T.$$

2) *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\sum(\alpha u_n)$ est convergente et on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha u_n) = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \alpha S.$$

Démonstration.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}(u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k = S_n + T_n.$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n}(u_k + v_k) = \lim_{n\to+\infty} S_n + T_n = S + T.$$

2) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}(\alpha u_k) = \alpha \sum_{k=0}^{n} u_k = \alpha S_n.$$

Par suite

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n}(\alpha u_k) = \lim_{n\to+\infty} \alpha S_n = \alpha S.$$

■

Exemple 1.5 Soit la série de terme général $w_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n},\ n \in \mathbb{N}$.
On a :

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= u_n + v_n \end{aligned}$$

avec $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont géométriques de raisons respectives $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$, donc donc elles sont convergentes et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Alors la série $\sum w_n$ est convergente et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}.$$

Remarque 1.2 Comme conséquence de la linéarité, observons que si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

On vient de voir qu'une fois la suite des sommes partielles associée est explicitée alors on peut déduire la nature de la série qui est de même que la suite des sommes partielles, mais trouver l'expression analytique exacte de celle-ci, n'est pas toujours facile, par exemple la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$. Pour remédier à ce problème, il a fallu concevoir d'autres critères qui nous permettent de déterminer la nature d'une série numérique sans trouver l'expression analytique de la suite des sommes partielles qui lui est associée.

1.2.2 Condition nécessaire de convergence

1.4 Proposition

Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_n$ tend vers 0.

Démonstration.
Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite $(S_n)_n$ des sommes partielles converge vers la somme S de la série. Il en est de même pour la suite $(S_{n-1})_n$. De plus, pour tout entier $n \geq 1$

$$S_n - S_{n-1} = (u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{n-1} + u_n) - (u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{n-1}) = u_n,$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n - S_{n-1} = S - S = 0.$$

■

Remarque 1.3 La proposition précédente est utile sous sa forme contraposée. C'est à dire, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, alors la série $\sum u_n$ diverge. On dira que la série est grossièrement divergente.

Exemple 1.6 Soit la série de terme général $u_n = \frac{n+1}{2n+1},\ n \in \mathbb{N}$.
On a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

La condition nécessaire de convergence n'est pas vérifiée, alors la série est grossièrement divergente.

1.1 Théorème (Critère de Cauchy)

La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_n$ est de Cauchy, c'est à dire

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall p, q \in \mathbb{N},\quad p > q \geq N_\epsilon \Longrightarrow \left| \sum_{n=q+1}^{p} u_n \right| < \epsilon.$$

Démonstration.

Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite $(S_n)_n$ des sommes partielles est convergente, par conséquent c'est une suite de Cauchy, donc le théorème est prouvé. ■

Exemple 1.7 Série harmonique : C'est la série dont le terme général est donné par $u_n = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*$. Pour montrer que cette série est divergente, il suffit de montrer que la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ n'est pas de Cauchy.

En effet, pour $p = 2n$ et $q = n$, on trouve que

$$\begin{aligned} S_p - S_q &= S_{2n} - S_n \\ &= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}\right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} \\ &\geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + ... + \frac{1}{2n} \\ &= n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Pour que $(S_n)_n$ ne soit pas de Cauchy, il suffit ainsi de choisir $\epsilon = \frac{1}{2}$.

1.2.3 Reste de rang n d'une série convergente

1.7 Définition

Soit $\sum u_n$ une série convergente. On appelle reste de rang n la somme $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

1.5 Proposition

Soit $\sum u_n$ une série convergente. Alors $\lim_{n \to +\infty} R_n = 0$.

Démonstration.

Soit $\sum u_n$ une série convergente vers la somme S. On a :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = S_n + R_n,$$

donc

$$R_n = S - S_n,$$

alors

$$\lim_{n \to +\infty} R_n = \lim_{n \to +\infty} S - S_n = S - S = 0.$$

■

1.3 Séries à termes réels positifs

1.8 Définition

Une série $\sum u_n$ est dite à termes positifs si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

Remarque 1.4

1) Les séries $\sum u_n$ vérifiant $u_n \geq 0$ pour $n \geq n_0$ sont aussi appelées séries à termes positifs.
2) Si une série $\sum u_n$ est à termes positifs, la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ est croissante. En effet $S_n - S_{n-1} = u_n \geq 0$, d'où la proposition :

1.6 Proposition (Majoration)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ est majorée.

Démonstration.

Il suffit d'appliquer la remarque précédente et de se rappeler que les suites croissantes et majorées sont convergentes. ■

Exemple 1.8 Soit la série de terme général $u_n = \frac{n-1}{(n+1)!},\ n \geq 2$.

Comme $u_k = \frac{k-1}{(k+1)!} = \frac{1}{(k+1)k.(k-2)!} \leq \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ pour tout $k \geq 2$, alors

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{(k+1)!} \\ &\leq \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \\ &\leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$(S_n)_n$ est majorée, ce qui implique que la série $\sum_{n\geq 2} \frac{n-1}{(n+1)!}$ est convergente..

1.3.1 Règle de comparaison

1.2 Théorème (Règle de comparaison)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$. Alors

1) *Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.*
2) *Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.*

Démonstration.

Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} v_n$.

1) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$, alors $S_n \leq T_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Puisque $\sum v_n$ est convergente, alors la suite $(T_n)_n$ est convergente, donc elle est majorée.
   Par conséquent $(S_n)_n$ est majorée.
   D'après la proposition de majoration, la série $\sum u_n$ est convergente.
2) C'est la contraposée de la première proposition.

■

Remarque 1.5 Le Théorème de comparaison reste vrai si l'inégalité $0 \leq u_n \leq v_n$ est réalisée à partir d'une certain ordre $n_0 \in \mathbb{N}$, c'est à dire $0 \leq u_n \leq v_n$ si $n \geq n_0$.

Exemple 1.9 Soit la série de terme général $u_n = \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$.
$u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut appliquer la règle de comparaison.

Comme $0 \leq \sin x \leq x$ pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}[$, alors

$$u_n = \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

$\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ donc convergente, d'après la règle de comparaison $\sum u_n$ est convergente.

Exemple 1.10 Nous avons vu que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge. On en déduit facilement que les séries $\sum_{n\geq 1}\frac{\ln n}{n}$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ sont divergentes. En effet

$$\frac{\ln n}{n} \quad \geq \quad \frac{1}{n} \qquad \text{pour tout} \quad n \geq 3$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \quad \geq \quad \frac{1}{n} \qquad \text{pour tout} \quad n \geq 1.$$

1.3.2 Règle d'équivalence

1.3 Théorème (Règle d'équivalence)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n} = 1$. Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration.
Par hypothèse, pour $\epsilon = \frac{1}{2}$, il existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_\epsilon$,

$$\frac{1}{2}v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2}v_n.$$

D'après la règle de comparaison et l'inégalité précédent on trouve que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. ■

Exemple 1.11 Soit la série de terme général $u_n = \frac{1+2^n}{3^n+n}$, $n \in \mathbb{N}$.
On a :

$$\begin{aligned} u_n \quad &= \quad \frac{1+2^n}{3^n+n} = \frac{2^n}{3^n} \times \frac{1+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{n}{3^n}} \\ &\sim_{+\infty} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad \text{car} \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{n}{3^n}} = 1. \end{aligned}$$

$\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ est une série géométrique de raison $\frac{2}{3}$ donc elle est convergente, d'après la règle d'équivalence $\sum u_n$ est convergente.

1.3.3 Comparaison d'une série avec une intégrale

1.4 Théorème (Comparaison avec une intégrale)

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue et décroissante. La série de terme général $u_n = f(n)$ est de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$.

Exemple 1.12 Soit la série de terme général $u_n = \frac{1}{n \ln n}$, $n \geq 2$.
La fonction $f(t) = \frac{1}{t \ln t}$ est positive et décroissante sur $[2; +\infty[$. D'après le théorème précédent, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln t} dt$ converge. Or

$$\int_2^T \frac{1}{t \ln t} dt = [\ln(\ln t)]_2^T = \ln(\ln T) - \ln(\ln 2),$$

alors

$$\lim_{T \to +\infty} \int_2^T \frac{1}{t \ln t} dt = \lim_{T \to +\infty} \ln(\ln T) - \ln(\ln 2) = +\infty.$$

La série $\sum u_n$ est donc divergente.

1.3.4 Série de Riemann

1.9 Définition

On appelle série de Riemann la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1.7 Proposition

La série de Riemann $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration.

1) Si $\alpha \leq 0$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < 0, \\ 1 & \text{si } \alpha = 0, \end{cases}$$

la condition nécessaire de convergence n'est pas vérifiée et donc $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est divergente.

2) Si $\alpha > 0$, la fonction $f_\alpha(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ est positive et décroissante sur $[1; +\infty[$. D'après le théorème de comparaison avec une intégrale, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$ converge. Or

$$\int_1^T \frac{1}{t^\alpha}dt = \begin{cases} \frac{T^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \ln T & \text{si } \alpha = 1, \end{cases}$$

alors

$$\lim_{T\to+\infty} \int_1^T \frac{1}{t^\alpha}d = \begin{cases} +\infty & \text{si } 0 < \alpha \leq 1, \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est donc convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

■

1.2 Corollaire (Règle de Riemann)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

1) *S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors la série $\sum u_n$ converge.*
2) *S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = +\infty$, alors la série $\sum u_n$ diverge.*

Démonstration.

1) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$, donc pour $\epsilon = 1$, il existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_\epsilon$,

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^\alpha}.$$

D'après la règle de comparaison, la série $\sum u_n$ est convergente.

2) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = +\infty$, donc pour $\epsilon = 1$, il existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_\epsilon$,

$$u_n \geq \frac{1}{n^\alpha}.$$

D'après la règle de comparaison, la série $\sum u_n$ est divergente.

■

Exemple 1.13 Soit la série de terme général $u_n = e^{-\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$.
On a :

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = \lim_{n\to+\infty} e^{2\ln n} e^{-\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{2\ln n - \sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\sqrt{n}(2\frac{\ln n}{\sqrt{n}} - 1)} = 0.$$

D'après la règle de Riemann, la série $\sum u_n$ est convergente.

Exemple 1.14 Soit la série de terme général $u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\sqrt{\ln n}}},\ n \geq 2$.
On a :

$$\lim_{n\to+\infty} nu_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln n} e^{-\sqrt{\ln n}\ln\ln n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln n(1-\frac{\ln\ln n}{\sqrt{\ln n}})} = +\infty.$$

D'après la règle de Riemann, la série $\sum u_n$ est divergente.

1.3.5 Série de Bertrand

1.10 Définition

On appelle série de Bertrand la série $\displaystyle\sum_{n\geq1} \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ *où* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1.8 Proposition

La série de Bertrand $\displaystyle\sum_{n\geq1} \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ *converge si et seulement si* ($\alpha > 1$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$) *ou* ($\alpha = 1$ *et* $\beta > 1$).

Démonstration.

1) Si $\alpha > 1$ alors $\frac{\alpha+1}{2} > 1$, posons $\gamma = \frac{\alpha+1}{2}$, on trouve que

$$\lim_{n\to+\infty} n^\gamma \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}{n^\alpha(\ln n)^\beta} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\frac{\alpha-1}{2}}(\ln n)^\beta} = 0, \quad \forall\beta \in \mathbb{R},$$

d'après la règle de Riemann, la série $\sum_{n\geq1} \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ converge si $\alpha > 1$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}$.

2) Si $\alpha > 1$, nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} n\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{1-\alpha}}{(\ln n)^\beta} = +\infty, \quad \forall\beta \in \mathbb{R},$$

d'après la règle de Riemann, la série $\sum_{n\geq1} \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ diverge si $\alpha < 1$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}$.

3) Si $\alpha > 1$, $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$, on utilise la règle de comparaison avec une intégrale.
Considérons la fonction $f : [2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{1}{t(\ln t)^\beta}$. f est continue, positive et décroissante sur $[2, +\infty[$ et pour tout $T \in [2, +\infty[$, on a :

$$\int_2^T f(t)dt = \int_2^T \frac{1}{t(\ln t)^\beta}dt = \begin{cases} \frac{(\ln T)^{1-\beta}-\ln 2}{1-\beta} & \text{si } \beta \neq 1, \\ \ln(\ln T) - \ln(\ln 2) & \text{si } \beta = 1, \end{cases}$$

alors

$$\lim_{T\to+\infty} \int_2^T f(t)dt = \begin{cases} +\infty & \text{si } \beta \leq 1, \\ \frac{\ln 2}{\beta-1} & \text{si } \beta > 1. \end{cases}$$

Donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

■

1.3.6 Critère de Cauchy

1.5 Théorème (Critère de Cauchy)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$, alors

1) *Si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge.*
2) *Si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.*
3) *Si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.*

Démonstration.
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$, alors

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_\epsilon,\ (\ell-\epsilon)^n \leq u_n \leq (\ell+\epsilon)^n.$$

1) Si $\ell < 1$, prenons $\epsilon = \frac{1-\ell}{2}$, $1+\epsilon = \frac{1+\ell}{2} < 1$, on trouve que $u_n \leq \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$ pour tout $n \geq n_\epsilon$. Par conséquent la série $\sum u_n$ converge.
2) Si $\ell > 1$, prenons $\epsilon = \ell - 1$, on trouve que $u_n \geq 1$ pour tout $n \geq n_\epsilon$. Donc la série $\sum u_n$ diverge.
3) On sait d'une part que la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, et d'autre part, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{\ln n}{n}} = 1$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} e^{-2\frac{\ln n}{n}} = 1.$$

Donc on ne peut rien conclure pour la nature de la série $\sum u_n$ si $\ell = 1$.

■

Exemple 1.15 Soit la série de terme général $u_n = \left(\frac{2n+1}{3n+4}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.
On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+4}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{3n+4} = \frac{2}{3} < 1.$$

D'après le critère de Cauchy la série $\sum u_n$ est convergente.

Exemple 1.16 Soit la série de terme général $u_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2},\ n \in \mathbb{N}^*$.
On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = e^{-1} < 1.$$

D'après le critère de Cauchy la série $\sum u_n$ est convergente.

Exemple 1.17 Soit la série de terme général $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2},\ n \in \mathbb{N}^*$.
On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e > 1.$$

D'après le critère de Cauchy la série $\sum u_n$ est divergente.

Exemple 1.18 Soit la série de terme général $u_n = 2^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2},\ n \in \mathbb{N}^*$.
On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}} = \lim_{n\to+\infty} 2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{2}{e} < 1.$$

D'après le critère de Cauchy la série $\sum u_n$ est convergente.

1.3.7 Critère de d'Alembert

1.6 Théorème (Critère de d'Alembert)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors

1) *Si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge.*
2) *Si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.*
3) *Si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.*

Démonstration.
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_\epsilon,\ (\ell-\epsilon)^n u_{n_\epsilon} \leq u_n \leq (\ell+\epsilon)^n u_{n_\epsilon}.$$

1) Si $\ell < 1$, prenons $\epsilon = \frac{1-\ell}{2},\ 1+\epsilon = \frac{1+\ell}{2} < 1$, on trouve que $u_n \leq u_{n_\epsilon}\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$ pour tout $n \geq n_\epsilon$. Par conséquent la série $\sum u_n$ converge.

2) Si $\ell > 1$, prenons $\epsilon = \ell - 1$, on trouve que $u_n \geq u_{n_\epsilon}$ pour tout $n \geq n_\epsilon$. Donc la série $\sum u_n$ diverge.
3) On sait d'une part que la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, et d'autre part, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

Donc on ne peut rien conclure pour la nature de la série $\sum u_n$ si $\ell = 1$.

■

Exemple 1.19 Soit la série de terme général $u_n = \frac{1}{n!},\ n \in \mathbb{N}$.
On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)!}\frac{n!}{1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

D'après le critère de de d'Alembert la série $\sum u_n$ est convergente.

Exemple 1.20 Soit la série de terme général $u_n = \frac{n^n}{n!},\ n \in \mathbb{N}$.
On a :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1).n!}\frac{n!}{n^n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1.\end{aligned}$$

D'après le critère de d'Alembert la série $\sum u_n$ est divergente.

1.7 Théorème (Critère de Raabe-Duhamel)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, supposons que $\lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ell$, alors
1) *Si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ converge.*
2) *Si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ diverge.*
3) *Si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.*

Exemple 1.21 Soit la série de terme général $u_n = \frac{2\times 5\times ...\times(3n-4)\times(3n-1)}{9\times 12\times ...\times(3n+3)\times(3n+6)},\ n\in\mathbb{N}^*$.
On a :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{2\times 5\times ...\times(3n-4)\times(3n-1)\times(3n+2)}{9\times 12\times ...\times(3n+3)\times(3n+6)\times(3n+9)}\times\frac{9\times 12\times ...\times(3n+3)\times(3n+6)}{2\times 5\times ...\times(3n-4)\times(3n-1)}\\ &= \frac{3n+2}{3n+9},\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{3n+2}{3n+9}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{7n}{3n+9} = \frac{7}{3} > 1.$$

D'après le critère de Raabe-Duhamel, la série $\sum u_n$ est divergente.

1.4 Séries à termes quelconques

1.11 Définition

On appelle série à termes quelconques une série $\sum u_n$ dont les termes peuvent être positifs ou négatifs suivant les valeurs prises par n.

Exemple 1.22 Les séries $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n}{n}$ sont à termes quelconques.

1.4.1 Convergence absolue et semi convergence

1.12 Définition

1) *On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ est convergente.*
2) *On dit que la série $\sum u_n$ est semi convergente si elle est convergente sans qu'elle soit absolument convergente.*

1.8 Théorème

Une série absolument convergente est convergente.

$$\sum |u_n| \text{ converge} \Longrightarrow \sum u_n \text{ converge.}$$

Démonstration.

Supposons que $\sum u_n$ est absolument convergente, donc la série $\sum |u_n|$ converge, d'après le critère de Cauchy, on a :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall p > q \geq n_\epsilon,\ \left| \sum_{k=q+1}^{p} |u_k| \right| < \epsilon.$$

Comme

$$\left| \sum_{k=q+1}^{p} u_k \right| \leq \left| \sum_{k=q+1}^{p} |u_k| \right|,$$

alors

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall p > q \geq n_\epsilon,\ \left| \sum_{k=q+1}^{p} u_k \right| < \epsilon.$$

d'où la convergence de la série $\sum u_n$ ■

Exemple 1.23 Soit la série de terme général $u_n = \frac{\sin n}{n^2},\ n \in \mathbb{N}^*$.
On a : $\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$, donc $\sum |u_n|$ converge et d'après le théorème précédent, $\sum u_n$ converge.

Remarque 1.6

1) La réciproque du théorème précédent est fausse, on peut prendre comme contre exemple la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
2) L'intérêt fondamental du Théorème précédent est que l'on peut appliquer les propriétés des séries à termes positifs, à la série $\sum |u_n|$ qui est à termes positifs.

1.4.2 Critère d'Abel

1.9 Théorème (Critère d'Abel)

Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites telles que :

1) *La suite $(a_n)_n$ est positive, décroissante et tend vers 0.*
2) *Les sommes partielles de la suite $(b_n)_n$ sont bornées :*

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N},\ \left| \sum_{k=0}^{n} b_k \right| \leq M,$$

alors la série $\sum a_n b_n$ converge.

Exemple 1.24 Soit la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*$.
Posons $a_n = \frac{1}{n}$ et $b_n = (-1)^n$. On a :

1) La suite $(a_n)_n$ est positive, décroissante et tend vers 0.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\right| = |-1+1-1+1+...+(-1)^n| \leq 1.$$

D'après le critère d'Abel, $\sum u_n$ converge.

Remarque 1.7 La série$\sum \frac{(-1)^n}{n}$ n'est pas absolument convergente car $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$.

Exemple 1.25 Soit la série de terme général $u_n = \frac{\sin n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*$.
Posons $a_n = \frac{1}{n}$ et $b_n = \sin n$. On a :
1) La suite $(a_n)_n$ est positive, décroissante et tend vers 0.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\sin k\right| &= \left|\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ik}\right)\right| = \left|\mathrm{Im}\left(\frac{e^i - e^{i(n+1)}}{1-e^i}\right)\right| \\ &\leq \left|\frac{e^i - e^{i(n+1)}}{1-e^i}\right| \leq \frac{2}{|1-e^i|}.\end{aligned}$$

D'après le critère d'Abel, $\sum u_n$ converge.

Remarque 1.8 La série$\sum \frac{\sin n}{n}$ n'est pas absolument convergente. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left|\frac{\sin n}{n}\right| \geq \frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1-\cos(2n)}{2n} = \frac{1}{2n} - \frac{\cos(2n)}{2n}.$$

Comme $\sum \frac{1}{2n}$ diverge et $\sum \frac{\cos(2n)}{2n}$ converge, alors $\sum \left|\frac{\sin n}{n}\right|$ diverge. Donc $\sum \frac{\sin n}{n}$ est semi-convergente.

1.4.3 Séries alternées

1.13 Définition

On dit qu'une série à termes réels $\sum u_n$ est alternée si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n a_n \text{ ou } u_n = (-1)^{n+1} a_n \text{ avec } a_n \geq 0.$$

Exemple 1.26 Les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{n}$ sont alternées.

1.10 Théorème (Critère de Leibniz)

Si la suite $(a_n)_n$ est positive, décroissante et tend vers 0, alors la série $\sum(-1)^n a_n$ converge.

Démonstration.
Il suffit d'appliquer le théorème d'Abel en prenant $b_n = (-1)^n$. ■

Exemple 1.27 Soit la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},\ n \in \mathbb{N}^*$.
On a : $u_n = (-1)^n a_n$ avec $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et la suite $(a_n)_n$ est positive, décroissante et tend vers 0. D'après le critère de Leibniz, $\sum u_n$ converge.

1.4.4 Méthode de développement limité

C'est une technique qu'on applique sur quelques séries à terme quelconques pour lesquelles les critères précédents ne s'appliquent pas. Il suffit d'utiliser un développement asymptotique du terme général.

Exemple 1.28 Soit la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n},\ n \in \mathbb{N}$.
La suite $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ n'est pas décroissante et donc on ne peut pas appliquer le critère de Leibniz. On a :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}.$$

On utilise un développement limité de la fonction $\frac{1}{1+x}$ au voisinage de 0 à l'ordre 2,

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left[1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$

Les séries de termes généraux respectifs $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ et $o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ sont convergentes mais la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge. Donc la série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ diverge.

Exemple 1.29 Soit la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n},\ n \in \mathbb{N}$.

Le même calcul précédent donne

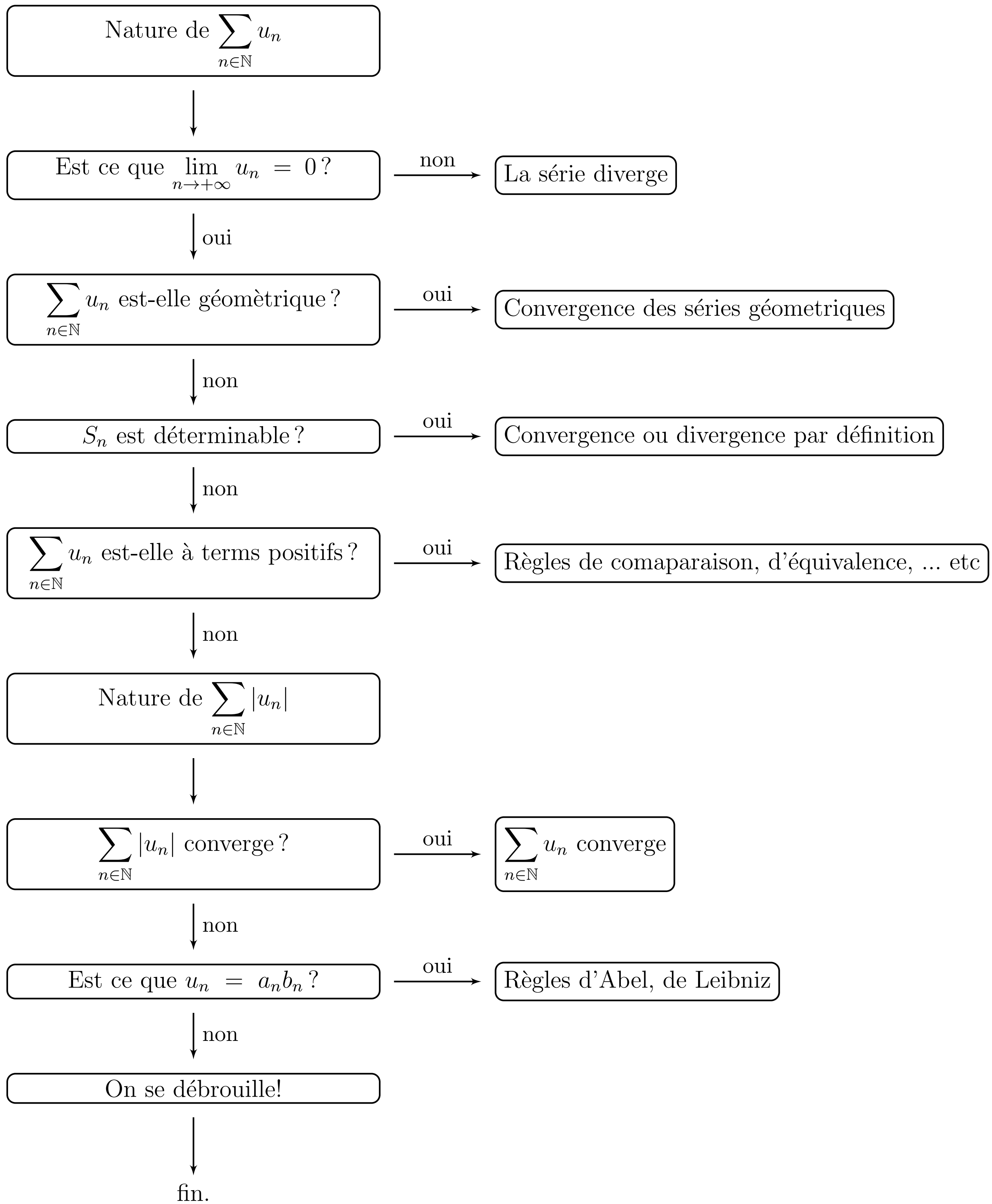
$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{n} \times \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n}}\\ &= \frac{(-1)^n}{n}\left[1-\frac{(-1)^n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\\ &= \frac{(-1)^n}{n}-\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ converge par le critère de Leibniz et les séries de termes généraux respectifs $\frac{1}{n^2}$ et $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ sont absolument convergentes, donc la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ est bien convergente.

Remarque 1.9 Si en utilisant le développement limité, il faut développer à un ordre suffisamment élevé pour obtenir un reste absolument convergent.

1.5 Récapitulatif des techniques de convergence

Pratiquement le schéma ci-dessus rassemble et résume les résultats de convergence de ce chapitre, comme souvent en mathématique, ces résultats ne permettent pas de conclure dans tous les cas.


Nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$
Est ce que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$?
non
La série diverge
oui
$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est-elle géomètrique ?
oui
Convergence des séries géometriques
non
S_n est déterminable ?
oui
Convergence ou divergence par définition
non
$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est-elle à terms positifs ?
oui
Règles de comaparaison, d'équivalence, ... etc
non
Nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$
$\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ converge ?
oui
$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge
non
Est ce que $u_n = a_n b_n$?
oui
Règles d'Abel, de Leibniz
non
On se débrouille!
fin.

1.6 Exercices sur le chapitre 1

Exercice 1.1 Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$, **2**. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, **3**. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{2^n+(-4)^n}{5^n}$,

4. $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$, **5**. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2-1}$.

Exercice 1.2 Etudier la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(n+1)^{n-1}}{n^{n+1}}$, **2**. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\sqrt{\frac{n}{n^4+1}}$, **3**. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$,

4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$, **5**. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{n^2}{3^n}$, **6**. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1.3.5...(2n+1)}{4.8.12...4n}\frac{1}{(n+1)}$,

7. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\sqrt[n]{0.0001}$, **8**. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$, **9**. $\displaystyle\sum_{n\geq 3}\frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}$.

Exercice 1.3 Soit $a>0$, déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}^{+\infty}\frac{(an)^n}{n!}$, **2**. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{2^n}{n^a}$, **3**. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{a^n}{1+a^n}$

Exercice 1.4 Etudier la convergence et la convergence absolue des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{n}{5n-2}$, **2**. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{1.4.7...(3n-2)}{3.5.7...(2n+1)}$, **3**. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\sin\left(\frac{n^2+1}{n}\pi\right)$,

4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}$, **5**. $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{\cos(n\pi)}{\ln(n)}$, **6**. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(n)}{n^2}$,

7. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(n)}{n}$, **8**. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$, **9**. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(n)}{\sqrt{n}+1}$.

Exercice 1.5 Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n}{n!}$, **2**. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n^2}{n!}$, **3**. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n}{2^n}$,

4. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n^2}{2^n}$, **5**. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n^2+2n-1}{n!}$.

Indication : $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}=\exp(1)=e^1=e$.

Exercice 1.6 (Concours 2018)

1) Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

2) En déduire la limite suivante $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n+3)!}$.

Exercice 1.7 (Concours 2017)

1) Montrer la convergence de la sérier : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$.

2) En déduire la limite suivante $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^n \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n^2}$.

1.7 Corrigé des exercices sur le chapitre 1

Corrigé de l'exercice 1.1

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

d'où

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1.$$

Donc la série $\sum u_n$ est convergente et on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\frac{(n+2)-n}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{1}{2}(a_n - a_{n+1}), \end{aligned}$$

où $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$, alors

$$S_n = \frac{1}{2}(a_1 - a_{n+1}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{1}{4}.$$

Donc la série $\sum u_n$ est convergente et on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{2^n + (-4)^n}{5^n} = \frac{2^n}{5^n} + \frac{(-4)^n}{5^n} \\ &= \left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{-4}{5}\right)^n, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + ... + u_n \\ &= \left[\left(\frac{2}{5}\right)^0 + \left(\frac{2}{5}\right)^1 + ... + \left(\frac{2}{5}\right)^n\right] + \left[\left(\frac{-4}{5}\right)^0 + \left(\frac{-4}{5}\right)^1 + ... + \left(\frac{-4}{5}\right)^n\right] \\ &= \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{5}} + \frac{1 - \left(\frac{-4}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{-4}{5}} = 5\left[\frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{3}\right] + 5\left[\frac{1 - \left(\frac{-4}{5}\right)^{n+1}}{9}\right], \end{aligned}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} 5\left[\frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{3}\right] + 5\left[\frac{1 - \left(\frac{-4}{5}\right)^{n+1}}{9}\right] = \frac{5}{3} + \frac{5}{9} = \frac{20}{9}.$$

Donc la série $\sum u_n$ est convergente et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n + (-4)^n}{5^n} = \frac{20}{9}$.

4) Pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right) \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) = a_{n+1} - a_n, \end{aligned}$$

où $a_n = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$, alors

$$S_n = (a_{n+1} - a_2) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln 2,$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln 2 = -\ln 2.$$

Donc la série $\sum u_n$ est convergente et on a $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\ln 2$.

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n = \frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{2}\frac{(n+1)-(n-1)}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right),$$

d'où

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n} u_k = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+1}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n-1}\right) - \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\right] \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} \end{aligned}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{3}{4}.$$

Donc la série $\sum u_n$ est convergente et on a $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}$.

Corrigé de l'exercice 1.2

1) Posons $u_n = \frac{(n+1)^{n-1}}{n^{n+1}}$, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(n+1)^{n-1}}{n^{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{n(n+1)} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n(n+1)} \\ &\sim_{+\infty} \frac{e}{n(n+1)} \quad \text{car} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \\ &\sim_{+\infty} \frac{e}{n^2}. \end{aligned}$$

$\sum \frac{e}{n^2}$ est une série de Riemann ($\alpha = 2$) convergente, et d'après le critère d'équivalence, la série $\sum u_n$ est convergente.

2) Posons $u_n = \sqrt{\frac{n}{n^4+1}}$, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{\frac{n}{n^4+1}} = \sqrt{\frac{n}{n^4(1+\frac{1}{n^4})}} = \sqrt{\frac{1}{n^3}}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n^4}}} \\ &\sim_{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \text{ car } \lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n^4}}} = 1. \end{aligned}$$

$\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Riemann ($\alpha = \frac{3}{2}$) convergente, et d'après le critère d'équivalence, la série $\sum u_n$ est convergente.

3) Posons $u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$, on a :

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + ... + u_n \\ &= \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + ... + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times ... \times\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1), \end{aligned}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty.$$

$(S_n)_n$ est divergente, d'où la divergence de la série $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

4) Posons $u_n = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

D'après le critère de Cauchy, la série $\sum u_n$ est convergente.

5) Posons $u_n = \frac{n^2}{3^n}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{3} < 1.$$

D'après le critère de de d'Alembert la série $\sum u_n$ est convergente.

6) Posons $u_n = \frac{1.3.5...(2n+1)}{4.8.12...4n} . \frac{1}{(n+1)}$, on a :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1.3.5...(2n+1)(2n+3)}{4.8.12...4n(4n+4)} . \frac{1}{(n+2)} \times \frac{4.8.12...4n}{1.3.5...(2n+1)} .(n+1) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n+3}{4n+4}\right)\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \frac{2}{4} < 1.\end{aligned}$$

D'après le critère de de d'Alembert la série $\sum u_n$ est convergente.

7) Posons $u_n = \sqrt[n]{0.0001}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{0.0001} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln(0.0001)} = 1.$$

La condition nécessaire de convergence n'est pas vérifiée, la série $\sum u_n$ est divergente.

8) Posons $u_n = \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$, on a :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{(\sqrt{2})^{n+1}} \times \frac{(\sqrt{2})^n}{2n-1} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.\end{aligned}$$

D'après le critère de d'Alembert la série $\sum u_n$ est convergente.

9) Posons $u_n = \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$. La suite $(u_n)_{n\geq 3}$ est positive, décroissante et tend vers 0, d'après le critère de comparaison avec une intégrale, la série $\sum u_n$ et l'intégrale $\int_3^{+\infty} \frac{1}{t \ln t \ln(\ln t)} dt$ sont de même nature. Or

$$\int_3^T \frac{1}{t \ln t \ln(\ln t)} dt = [\ln(\ln(\ln t))]_3^T = \ln(\ln(\ln T)) - \ln(\ln(\ln 3)),$$

alors

$$\lim_{T\to+\infty} \int_3^T \frac{1}{t \ln t \ln(\ln t)} dt = \lim_{T\to+\infty} \ln(\ln(\ln T)) - \ln(\ln(\ln 3)) = +\infty.$$

La série $\sum u_n$ est donc divergente.

Corrigé de l'exercice 1.3

1) Posons $u_n = \frac{(an)^n}{n!}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(an)^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{(an)^n} = \lim_{n\to+\infty} a\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = a\exp(1) = ae.$$

- Si $ae < 1 \Leftrightarrow a < \frac{1}{e}$, alors la série $\sum u_n$ est convergente.
- Si $ae > 1 \Leftrightarrow a > \frac{1}{e}$, alors la série $\sum u_n$ est divergente.
- Si $ae = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{e}$, on a $u_n = \frac{e^{-n}n^n}{n!}$.
  On utilise la formule de Stirling $n! \sim_{+\infty} e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}$, on trouve que
  $$u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}n^{\frac{1}{2}}}.$$
  $\sum \frac{1}{\sqrt{2\pi}n^{\frac{1}{2}}}$ est une série de Riemann ($\alpha = \frac{1}{2}$) divergente, et d'après le critère d'équivalence, la série $\sum u_n$ est divergente.

2) Posons $u_n = \frac{2^n}{n^a}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^a} \times \frac{n^a}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{n+1}{n}\right)^a = 2 > 1.$$

D'après le critère de de d'Alembert la série $\sum u_n$ est divergente pour tout $a \in \mathbb{R}$.

3) Posons $u_n = \frac{a^n}{1+a^n}$. Alors

- Si $a \geq 1$, on a :
  $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{1+a^n} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } a = 1, \\ 1 & \text{si } a > 1. \end{cases}$$
  La condition nécessaire de convergence n'est pas vérifiée, la série $\sum u_n$ est divergente.
- Si $0 < a < 1$, on a :
  $$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^{n+1}}{1+a^{n+1}} \times \frac{1+a^n}{a^n} = \lim_{n\to+\infty} a\left(\frac{1+a^n}{1+a^{n+1}}\right) = a < 1.$$
  D'après le critère de d'Alembert, la série $\sum u_n$ est convergente.

Corrigé de l'exercice 1.4

1) Posons $u_n = (-1)^n \frac{n}{5n-2}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{5n-2} = \frac{1}{5} \neq 0.$$

La condition nécessaire de convergence n'est pas vérifiée, la série $\sum u_n$ est divergente.

2) Posons $u_n = (-1)^n \frac{1.4.7...(3n-2)}{3.5.7...(2n+1)}$, on a :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1.4.7...(3n-2)(3n+1)}{3.5.7...(2n+1)(2n+3)}\times\frac{3.5.7...(2n+1)}{1.4.7...(3n-2)}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{3n+1}{2n+3}=\frac{3}{2}>1.\end{aligned}$$

D'après le critère de d'Alembert la série $\sum |u_n|$ est divergente.
D'autre part, comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{3}{2} > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n| = +\infty \neq 0$, donc la condition nécessaire de convergence n'est pas vérifiée, d'où la série $\sum u_n$ est divergente.

3) Posons $u_n = \sin\left(\frac{n^2+1}{n}\pi\right)$. Comme $\sin(x+n\pi) = (-1)^n\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = \sin\left(\frac{n^2+1}{n}\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{n}+n\pi\right) = (-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{1.1}$$

La suite $\left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)_{n\geq 2}$ est positive, décroissante et tend vers 0, d'après le critère de Leibniz $\sum u_n$ converge.
D'autre part, on a :

$$|u_n| = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \sim_{+\infty} \frac{\pi}{n}.$$

$\sum \frac{\pi}{n}$ est une série de Riemann ($\alpha = 1$) divergente, d'après le critère d'équivalence, la série $\sum |u_n|$ est divergente et par conséquent $\sum u_n$ est semi-convergente.

4) Posons $u_n = (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$.
La suite $\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)_{n\geq 3}$ est positive, décroissante et tend vers 0, d'après le critère de Leibniz $\sum u_n$ converge.
D'autre part, on a :

$$|u_n| = \frac{\ln(n)}{n} = \frac{1}{n\ln^{-1}(n)}.$$

$\sum \frac{1}{n\ln^{-1}(n)}$ est une série de Bertrand ($\alpha = 1, \beta = -1$) divergente, donc la série $\sum |u_n|$ est divergente et par conséquent $\sum u_n$ est semi-convergente.

5) Posons $u_n = \frac{\cos(n\pi)}{\ln(n)}$. En utilisant le fait que $\cos(n\pi) = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et le critère de Leibniz, on trouve facilement que la série $\sum u_n$ est semi-convergente.

6) Posons $u_n = \frac{\sin(n)}{n^2}$, on a :

$$\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2},$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann ($\alpha = 2$) convergente, d'après le critère de comparaison, la série $\sum |u_n|$ est convergente et par conséquent $\sum u_n$ converge.

7) Posons $u_n = \frac{\sin(n)}{n}$, on a :

1) La suite $(\frac{1}{n})_n$ est positive, décroissante et tend vers 0.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} \sin k\right| &= \left|\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ik}\right)\right| = \left|\operatorname{Im}\left(\frac{e^i - e^{i(n+1)}}{1-e^i}\right)\right| \\ &\leq \left|\frac{e^i - e^{i(n+1)}}{1-e^i}\right| \leq \frac{2}{|1-e^i|}.\end{aligned}$$

D'après le critère d'Abel, $\sum u_n$ converge.

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left|\frac{\sin n}{n}\right| \geq \frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1-\cos(2n)}{2n} = \frac{1}{2n} - \frac{\cos(2n)}{2n}.$$

Comme $\sum \frac{1}{2n}$ diverge et $\sum \frac{\cos(2n)}{2n}$ converge, alors $\sum \left|\frac{\sin n}{n}\right|$ diverge. Donc $\sum \frac{\sin n}{n}$ est semi-convergente.

8) Posons $u_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$. En utilisant le fait que $\sin(-x) = -\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on trouve que

$$u_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

De la même manière que dans l'exemple (1.1), on trouve que la série $\sum u_n$ est semi-convergente.

9) Posons $u_n = \frac{\cos(n)}{\sqrt{n+1}}$, on a :

1) La suite $(\frac{1}{\sqrt{n+1}})_n$ est positive, décroissante et tend vers 0.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} \cos(k)\right| &= \left|\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ik}\right)\right| = \left|\operatorname{Re}\left(\frac{e^i - e^{i(n+1)}}{1-e^i}\right)\right| \\ &\leq \left|\frac{e^i - e^{i(n+1)}}{1-e^i}\right| \leq \frac{2}{|1-e^i|}.\end{aligned}$$

D'après le critère d'Abel, $\sum u_n$ converge.

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left|\frac{\cos(n)}{n}\right| \geq \frac{\cos^2(n)}{n} = \frac{1+\cos(2n)}{2n} = \frac{1}{2n} + \frac{\cos(2n)}{2n}.$$

Comme $\sum \frac{1}{2n}$ diverge et $\sum \frac{\cos(2n)}{2n}$ converge, alors $\sum \left|\frac{\cos(n)}{\sqrt{n}+1}\right|$ diverge. Donc $\sum \frac{\cos(n)}{\sqrt{n}+1}$ est semi-convergente.

Corrigé de l'exercice 1.5

1) Sachant que $n! = n(n-1)!$,

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n!} = \sum_{n\geq 1} \frac{n}{n(n-1)!} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} = e.$$

2) En utilisant le fait que $n^2 = n(n-1)+n$ et $n! = n(n-1)!$, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{n!} &= \sum_{n\geq 1} \frac{n(n-1)+n}{n!} \\
&= \sum_{n\geq 2} \frac{n(n-1)}{n!} + \sum_{n\geq 1} \frac{n}{n!} \\
&= \sum_{n\geq 2} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} + \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} = e + e = 2e.
\end{aligned}$$

3) Comme $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} = 2$ et $n = (n+1)-1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} \frac{n}{2^n} &= \sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{2^n} - \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} \\
&= 2\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{2^{n+1}} - 2 \\
&= 2\sum_{n\geq 1} \frac{n}{2^n} - 2 \\
&= 2\sum_{n\geq 0} \frac{n}{2^n} - 2,
\end{aligned}$$

alors

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n}{2^n} = 2.$$

4) En utilisant le fait que $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}=2$, $\sum_{n\geq 0}\frac{n}{2^n}=2$ et $n^2=n(n+1)-n$, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\frac{n^2}{2^n} &= \sum_{n\geq 0}\frac{n(n+1)}{2^n}-\sum_{n\geq 0}\frac{n}{2^n}\\ &= 2\sum_{n\geq 0}\frac{n(n+1)}{2^{n+1}}-2\\ &= 2\sum_{n\geq 1}\frac{(n-1)n}{2^n}-2\\ &= 2\sum_{n\geq 1}\frac{n^2}{2^n}-2\sum_{n\geq 1}\frac{n}{2^n}-2\\ &= 2\sum_{n\geq 0}\frac{n^2}{2^n}-2\sum_{n\geq 0}\frac{n}{2^n}-2\\ &= 2\sum_{n\geq 0}\frac{n^2}{2^n}-6,\end{aligned}$$

alors

$$\sum_{n\geq 0}\frac{n^2}{2^n}=6.$$

5) En utilisant le fait que $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}=e$, $\sum_{n\geq 0}\frac{n}{n!}=e$ et $\sum_{n\geq 0}\frac{n^2}{n!}=2e$, on obtient

$$\sum_{n\geq 0}\frac{n^2+2n-1}{n!}=\sum_{n\geq 0}\frac{n^2}{n!}+2\sum_{n\geq 0}\frac{n}{n!}-\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}=2e+2e-e=3e.$$

Corrigé de l'exercice 1.6

1) Posons $u_n=\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$, En utilisant le critère de D'Alembert, on trouve que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{((n+1)!)^2}{(2n+3)!}\times\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2(n!)^2}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!}\times\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)}=\frac{1}{4}<1.\end{aligned}$$

Alors la série $\sum u_n$ est convergente.

2) En déduire la limite : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n+3)!}$.

D'une part on a :

$$\frac{(n!)^2}{(2n+3)!} = \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} \times \frac{(n!)^2}{(2n+1)!},$$

d'autre part comme la série $\sum u_n$ converge, alors

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = 0,$$

et par conséquent :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+3)!} = 0.$$

Corrigé de l'exercice 1.7

1) Posons $u_n = 2^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$. En utilisant le critère de Cauchy, on trouve que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} 2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \\
&= \frac{2}{e} < 1.
\end{aligned}$$

Alors la série $\sum u_n$ est convergente.

2) En déduire la limite : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n^2}$.

D'une part on a :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{3}{2}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} &= \left(\frac{3}{2}\right)^n\frac{2^n}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} \\
&= \left(\frac{3}{4}\right)^n 2^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2},
\end{aligned}$$

d'autre part comme la série $\sum u_n$ converge, alors

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} 2^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} = 0,$$

et par conséquent :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n 2^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} = 0 \times 0 = 0.$$

Chapitre 2

Intégrales impropres

Jusqu'à présent, nous avons considéré l'intégration de fonctions continues sur un intervalle fermé et borné. Dans ce chapitre, nous présentons une généralisation de la définition de l'intégrale des fonctions pas nécessairement continue sur intervalles non bornées, par exemple

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx, \quad \int_0^1 \ln(x) dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx, ...$$

Ces intégrales sont appelées intégrales impropres (généralisées).

Objectifs du chapitre

- Savoir étudier la nature d'une intégrale impropre.
- Calculer une intégrale impropre.

2.1 Généralités sur les intégrales impropres

2.1 Définition

Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est localement intégrable sur I, si elle est intégrable sur tout intervalle fermé et borné de I.

Remarque 2.1 Tout fonction continue sur I est localement intégrable.

2.2 Définition

Soit f une fonction localement intégrable sur $[a, b[\subset \mathbb{R}(-\infty < a < b \leq +\infty)$. On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente si la fonction $F : t \rightarrow \displaystyle\int_a^t f(x)dx,\ (a \leq t < b)$ admet une limite quand t tend vers b, cette limite est appelée intégrale impropre de f sur $[a, b[$ et on note

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\rightarrow b} \int_a^t f(x)dx.$$

Dans le cas contraire on dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est divergente.

Exemple 2.1 Soit l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x-1}dx$.
La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x-1}$ est continue sur $[0, 1[$, donc elle est localement intégrable.
Soit $t \in [0, 1[$, on a :

$$\int_0^t \frac{1}{x-1}dx = [\ln|x-1|]_0^t = \ln|t-1| - \ln 1 = \ln|t-1|$$

et

$$\lim_{t\rightarrow 1} \int_0^t \frac{1}{x-1}dx = \lim_{t\rightarrow 1} \ln|t-1| = -\infty.$$

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x-1}dx$ est divergente.

Exemple 2.2 Soit l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$.
La fonction $x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc elle est localement intégrable.
Soit $t \in [0, +\infty[$, on a :

$$\int_0^t \frac{1}{1+x^2}dx = [\arctan(x)]_0^t = \arctan(t) - \arctan(0) = \arctan(t)$$

et

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{t\to+\infty}\arctan(t) = \frac{\pi}{2}.$$

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$ est convergenteet on a $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$.

2.3 Définition

Soit f une fonction localement intégrable sur $]a,b] \subset \mathbb{R}(-\infty \leq a < b < +\infty)$. On dit que l'intégrale de f sur $]a,b]$ est convergente si la fonction $F : t \to \displaystyle\int_t^b f(x)dx,\ (a < t \leq b)$ admet une limite quand t tend vers a, cette limite est appelée intégrale impropre de f sur $]a,b]$ et on note

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a}\int_t^b f(x)dx.$$

Dans le cas contraire on dit que l'intégrale de f sur $]a,b]$ est divergente.

Exemple 2.3 Soit l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$.
La fonction $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0,1]$, donc localement intégrable.
Soit $t \in]0,1]$, on a :

$$\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = [2\sqrt{x}]_t^1 = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{t} = 2 - 2\sqrt{t}$$

et

$$\lim_{t\to 0}\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to 0} 2 - 2\sqrt{t} = 2.$$

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ est convergenteet on a $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2$.

Exemple 2.4 Soit l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^x dx$.
La fonction $x \longmapsto e^x$ est continue sur $]-\infty,0]$, donc elle est localement intégrable.
Soit $t \in]-\infty,0]$, on a :

$$\int_t^0 e^x dx = [e^x]_t^0 = e^0 - e^t = 1 - e^t$$

et

$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^0 e^x dx = \lim_{t\to-\infty} 1 - e^t = 1.$$

Donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} e^x dx$ est convergente et on a $\int_{-\infty}^{0} e^x dx = 1$.

2.4 Définition

Soit f une fonction localement intégrable sur $]a,b[\subset \mathbb{R}(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$. Soit c un point quelconque de $]a,b[$.
On dit que l'intégrale de f sur $]a,b[$ est convergente si chacune des intégrales $\int_a^c f(x)dx$ et $\int_c^b f(x)dx$ est convergente. On appelle $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ l'intégrale impropre de f sur $]a,b[$ et on note

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Remarque 2.2

1) On pratique, pour étudier une intégrale impropre sur $]a,b[$, on choisit une valeur c de $]a,b[$. La valeur de l'intégrale est indépendante de c.
2) Pour $c \in]a,b[$, si $\int_a^c f(x)dx$ diverge, alors $\int_a^b f(x)dx$ diverge.

Exemple 2.5 Soit l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

La fonction $x \longmapsto \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0,+\infty[$, donc localement intégrable et la convergence de l'intégrale dépend de la convergence de deux intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx \qquad \text{et} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx.$$

- **Étude de $\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$:**
  Pour tout $t \in]0,1]$, on a :

$$\int_t^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = -2\int_t^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{-2\sqrt{x}}dx = [-2e^{-\sqrt{x}}]_t^1 = -2e^{-1} + 2e^{-\sqrt{t}}$$

  et

$$\lim_{t\to 0}\int_t^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to 0} -2e^{-1} + 2e^{-\sqrt{t}} = -2e^{-1} + 2.$$

  Donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ est convergente et on a $\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = -2e^{-1} + 2$.

- **Étude de** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$:
  Pour tout $t \in [1, +\infty[$, on a :

$$\int_1^t \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = -2\int_1^t \frac{e^{-\sqrt{x}}}{-2\sqrt{x}}dx = [-2e^{-\sqrt{x}}]_1^t = -2e^{-\sqrt{t}} + 2e^{-1}$$

  et

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to+\infty} -2e^{-\sqrt{t}} + 2e^{-1} = 2e^{-1}.$$

  Donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ est convergente et on a $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2e^{-1}$.

- **Conclusion** : Les deux intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ sont convergentes, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ est convergente et on a

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx &= \int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx \\ &= -2e^{-1} + 2 + 2e^{-1} = 2.\end{aligned}$$

Dans ce qui suit on considère les intégrales impropres en b.

2.1 Proposition (Linéarité)

Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur $[a, b[$ telles que les intégrales impropres $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ et $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ soient convergentes. Alors

1) *L'intégrale $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))dx$ est convergente et on a :*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

2) *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)dx$ est convergente et on a :*

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$$

Démonstration.

1) Pour tout $t \in [a, b[$, on a :

$$\int_a^t (f(x) + g(x))dx = \int_a^t f(x)dx + \int_a^t g(x)dx.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \lim_{t \to b} \int_a^t (f(x) + g(x))dx &= \lim_{n \to b} \int_a^t f(x)dx + \int_a^t g(x)dx \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \end{aligned}$$

2) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $t \in [a, b[$, on a :

$$\int_a^t \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^t f(x)dx.$$

Par suite

$$\lim_{t \to b} \int_a^t \alpha f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \alpha \int_a^t f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$$

■

Remarque 2.3 Comme conséquence de la linéarité, observons que si $\int_a^b f(x)dx$ converge et $\int_a^b g(x)dx$ diverge, alors $\int_a^b (f(x) + g(x))dx$ diverge.

2.1 Théorème (Changement de variable)

Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable sur $[a, b[(-\infty < a < b \leq +\infty)$, et $\varphi : [\alpha, \beta[\longrightarrow [a, b[$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et monotone sur $[\alpha, \beta[(-\infty < \alpha < \beta \leq +\infty)$, tels que $\varphi(\alpha) = a$ et $\lim_{t \to \beta} \varphi(t) = b$. Alors les intégrales

$$\int_a^b f(x)dx \qquad \text{et} \qquad \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

sont de même nature, et en cas de convergence on a

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Exemple 2.6 Soit l'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}dx$.
La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ est continue sur $[e, +\infty[$, donc localement intégrable.
En utilisant le changement de variable $x = e^t$, $dx = e^t dt$, on trouve que les intégrales $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ ont la même nature, et comme

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt = \lim_{T\to+\infty} [\ln(t)]_1^T = \lim_{T\to+\infty} \ln(T) - \ln(1) = +\infty,$$

donc divergente, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}dx$ est divergente.

2.2 Proposition (Intégrales de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) *L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*
2) *L'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.*

Démonstration.

1) Soit $t \in [1, +\infty[$, on a :

$$\int_1^t \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \frac{t^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \ln(t) & \text{si } \alpha = 1, \end{cases}$$

donc

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1, \\ +\infty & \text{si } \alpha \leq 1, \end{cases}$$

alors l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

2) Soit $t \in]0, 1]$, on a :

$$\int_t^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \frac{1-t^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1, \\ -\ln(t) & \text{si } \alpha = 1, \end{cases}$$

donc

$$\lim_{t\to 0} \int_t^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1, \\ +\infty & \text{si } \alpha \geq 1, \end{cases}$$

alors l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

■

Remarque 2.4 L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ est divergente car

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx = \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$$

où $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge pour $\alpha < 1$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge pour $\alpha > 1$.

On vient de voir qu'une fois la primitive associée a l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)dx$ est explicitée alors on peut déduire la nature de cette intégrale, il suffit de calculer une limite de la primitive, mais malheureusement c'est pas facile de trouver l'expression de celle-ci, par exemple le cas de la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$. Comme pour les séries numériques, il faut concevoir d'autres critères qui nous permettent de déterminer la nature d'une intégrale généralisée.

2.2 Intégrales impropres des fonctions positifs

2.2 Théorème (Majoration)

Soit f une fonction positive et localement intégrable sur $[a, b[$. Alors la fonction $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ définie sur $[a, b[$ est croissante et l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge si et seulement si la fonction F est majorée. De plus, on a

$$\forall t \in [a, b[, F(t) \leq \int_a^b f(x)dx.$$

Exemple 2.7 Soit l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2(x)}{x^2}dx$.

La fonction $x \longmapsto \frac{\cos^2(x)}{x^2}$ est positive et continue sur $[1, +\infty[$, donc localement intégrable.
Pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a :

$$0 \leq \frac{\cos^2(x)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2},$$

donc pour tout $t \in [1, +\infty[$,

$$\begin{aligned} F(t) = \int_1^t \frac{\cos^2(x)}{x^2}dx &\leq \int_1^t \frac{1}{x^2}dx \\ &= \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = -\frac{1}{t} + 1 \leq 1. \end{aligned}$$

Alors d'après le théorème de majoration $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2(x)}{x^2}dx$ est convergente.

2.2.1 Règle de comparaison

2.3 Théorème (Règle de comparaison)

Soient f et g deux fonctions positives et localement intégrables sur $[a, b[$ telles que $\forall x \in [a, b[,\ 0 \leq f(x) \leq g(x)$. Alors

1) *si l'intégrale $\int_a^b g(x)dx$ converge, alors l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge.*
2) *si l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ diverge, alors l'intégrale $\int_a^b g(x)dx$ diverge.*

Exemple 2.8 Soit l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1}dx$.
La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^2+x+1}$ est positive et continue sur $[1, +\infty[$, donc localement intégrable.
Pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a :

$$0 < \frac{1}{x^2+x+1} \leq \frac{1}{x^2}.$$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ est une intégrale de Riemann convergente, alors d'après le critère de comparaison $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1}dx$ est convergente.

2.2.2 Règle d'équivalence

2.4 Théorème (Règle d'équivalence)

Soient f et g deux fonctions positives et localement intégrables sur $[a, b[$ telles que $\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Alors les intégrales $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b g(x)dx$ sont de même nature.

Exemple 2.9 Soit l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2+1}dx$.
La fonction $x \longmapsto \frac{\arctan(x)}{x^2+1}$ est positive et continue sur $[1, +\infty[$, donc localement intégrable.
Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\frac{\arctan(x)}{x^2+1} \sim_{+\infty} \frac{\frac{\pi}{2}}{x^2} \quad \text{car} \quad \lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$

$\int_1^{+\infty} \frac{\frac{\pi}{2}}{x^2} dx$ est une intégrale de Riemann convergente, alors d'après le critère d'équivalence $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2+1} dx$ est convergente.

Exemple 2.10 Soit l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^x}{x} dx$.
La fonction $x \longmapsto \frac{e^x}{x}$ est positive et continue sur $]0, 1]$, donc localement intégrable.
Au voisinage de 0, on a :

$$\frac{e^x}{x} \sim_0 \frac{1}{x} \quad \text{car} \quad \lim_{x \to 0} e^x = 1.$$

$\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ est une intégrale de Riemann divergente, alors d'après le critère d'équivalence $\int_0^1 \frac{e^x}{x} dx$ est divergente.

2.2.3 Règle de Riemann

2.5 Théorème (Règle de Riemann)

Soient $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction positive et localement intégrable et $a > 0$,

1) *S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha f(x) = 0$, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge.*
2) *S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha f(x) = +\infty$, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge.*

Exemple 2.11 Soit l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$.
La fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ est positive et continue sur $[1, +\infty[$, donc localement intégrable.
On a :

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0.$$

D'après la règle de Riemann $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ est convergente.

2.2.4 Intégrales de Bertrand

Les intégrales de Bertrand sont des intégrales impropres de la forme

$$\int \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}.$$

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante de convergence de ces intégrales

2.6 Théorème

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. *Alors*

1) *L'intégrale* $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$ *converge si et seulement si* ($\alpha > 1$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$) *ou* ($\alpha = 1$ *et* $\beta > 1$).
2) *L'intégrale* $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^\alpha |\ln x|^\beta}$ *converge si et seulement si* ($\alpha < 1$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$) *ou* ($\alpha = 1$ *et* $\beta > 1$).

2.3 Intégrales impropres des fonctions de signe quelconque

2.3.1 Convergence absolue et semi convergence

2.5 Définition

Soit f *une fonction localement intégrable sur* $[a, b[$.

1) *On dit que l'intégrale impropre* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *est absolument convergente si* $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$ *est convergente.*
2) *On dit que l'intégrale impropre* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *est semi convergente si elle est convergente sans qu'elle soit absolument convergente.*

2.7 Théorème

Toute intégrale impropre absolument convergente est convergente.

$$\int_a^b |f(x)|dx \text{ converge} \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ converge.}$$

Exemple 2.12 Soit l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}dx$.

La fonction $x \longmapsto \frac{\sin(x)}{x^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$, donc localement intégrable.

Pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a :

$$\left|\frac{\sin(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}.$$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ est une intégrale de Riemann convergente, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}dx$ est absolument convergente et donc convergente.

Exemple 2.13 Soit l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$.
La fonction $x \longmapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est continue sur $[1, +\infty[$, donc localement intégrable.
Pour tout $t \in [1, +\infty[$ et par une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\int_1^t \frac{\sin(x)}{x}dx &= \left[-\frac{\cos(x)}{x}\right]_1^t - \int_1^t \frac{\cos(x)}{x^2}dx \\ &= -\frac{\cos(t)}{t} + \cos(1) - \int_1^t \frac{\cos(x)}{x^2}dx.\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2}dx$ est absolument convergente car $\left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^1}$, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2}dx$ converge et

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{\cos(x)}{x^2}dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2}dx.$$

Alors

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{\sin(x)}{x}dx = \lim_{t\to+\infty} -\frac{\cos(t)}{t} + \cos(1) - \int_1^t \frac{\cos(x)}{x^2}dx = \cos(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2}dx,$$

d'où $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$ est convergente.
D'autre part, pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$$\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \geq \frac{\sin^2(x)}{x} = \frac{1-\cos(2x)}{2x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos(2x)}{2x}.$$

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x}dx$ diverge et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{2x}dx$ converge, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| dx$ diverge. Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$ est semi-convergente.

2.3.2 Critère d'Abel

2.8 Théorème (Critère d'Abel)

Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur $[a, b[$ telles que

1) *f est positive et décroissante sur $[a, b[$ et $\lim_{x\to b} f(x) = 0$.*

2) $\exists M > 0,\ \forall t \in [a, b[,\ \left|\displaystyle\int_a^t g(x)dx\right| \leq M.$

Alors $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx$ converge.

Exemple 2.14 Soit l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx$.
La fonction $x \longmapsto \frac{\cos(x)}{x}$ est continue sur $[1, +\infty[$, donc localement intégrable.
Posons $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \cos(x)$, on a :

1) La fonction f est positive et décroissante sur $[1, +\infty[$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x) = 0$.
2) Pour tout $t \in [1, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}\left|\int_1^t g(x)dx\right| &= \left|\int_1^t \cos(x)dx\right| \\ &= \left|[\sin(x)]_1^t\right| = |\sin(t) - \sin(1)| \\ &\leq 2.\end{aligned}$$

D'après le critère d'Abel, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx$ converge.

Exemple 2.15 Soit l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \cos(x^2)dx$.
La fonction $x \longmapsto \cos(x^2)$ est continue sur $[1, +\infty[$, donc localement intégrable.
En utilisant le changement de variable $u = x^2$, on trouve que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \cos(x^2)dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{2\sqrt{u}} du$ ont la même nature.
Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{2\sqrt{u}} du$ converge d'après le critère d'Abel, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \cos^2(x)dx$ converge.

2.4 Fonction Gamma $\Gamma(x)$ d'Euler

2.3 Proposition

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, alors l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Démonstration.
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto t^{\alpha-1}e^{-t}$ est positive et continue sur $]0, +\infty[$, donc localement intégrable et la convergence de l'intégrale dépend de la convergence de deux intégrales suivantes :

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}e^{-t}dt \qquad \text{et} \qquad \int_1^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt.$$

En 0, on a :

$$t^{\alpha-1}e^{-t} \sim_0 t^{\alpha-1} = \frac{1}{t^{1-\alpha}},$$

donc l'intégrale $\int_0^1 t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.
En $+\infty$, on a :

$$\lim_{t\to+\infty} t^2 t^{\alpha-1}e^{-t} = 0 \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R},$$

d'après la règle de Riemann $\int_1^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ converge pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
Finalement, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$. ■

2.6 Définition

On appelle fonction Gamma d'Euler, la fonction $\Gamma :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Remarque 2.5 La fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ avec

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \forall k \in \mathbb{N},\ \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}dt.$$

En particulier $\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)t^{x-1}e^{-t}dt$.

2.1 Propriétés

Pour tout $x \in]0,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$,

1) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. *En particulier* $\Gamma(2) = \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$.
2) $\Gamma(x+n+1) = x(x+1)(x+2)...(x+n)\Gamma(x)$.
3) $\Gamma(n+1) = n!$.
4) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
5) $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$.
6) $\Gamma'(1) = -\gamma$ *où* $\gamma \approx 0,5772156649...$ *est la constante d'Euler-Mascheroni.*

2.5 Fonction Bêta $\beta(p.q)$ d'Euler

2.4 Proposition

Soit $(p,q) \in \mathbb{R}^2$, alors l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$ converge si et seulement si ($p > 0$ et $q > 0$).

Démonstration.
Pour tout $(p,q) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $t \longmapsto t^{p-1}(1-t)^{q-1}$ est positive et continue sur $]0,1[$, donc localement intégrable et la convergence de l'intégrale dépend de la convergence de deux intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt \qquad \text{et} \qquad \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt.$$

En 0, on a :

$$t^{p-1}(1-t)^{q-1} \sim_0 t^{p-1} = \frac{1}{t^{1-p}},$$

donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$ converge si et seulement si $p > 0$.
En 1, on a :

$$t^{p-1}(1-t)^{q-1} \sim_1 (1-t)^{q-1} = \frac{1}{(1-t)^{1-q}},$$

donc l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$ converge si et seulement si $q > 0$.

Finalement, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$ converge si et seulement si ($p > 0$ et $q > 0$). ■

2.7 Définition

On appelle fonction Bêta d'Euler, la fonction $\beta :]0,+\infty[\times]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\beta(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt.$$

2.2 Propriétés

Pour tout $p,q > 0$,

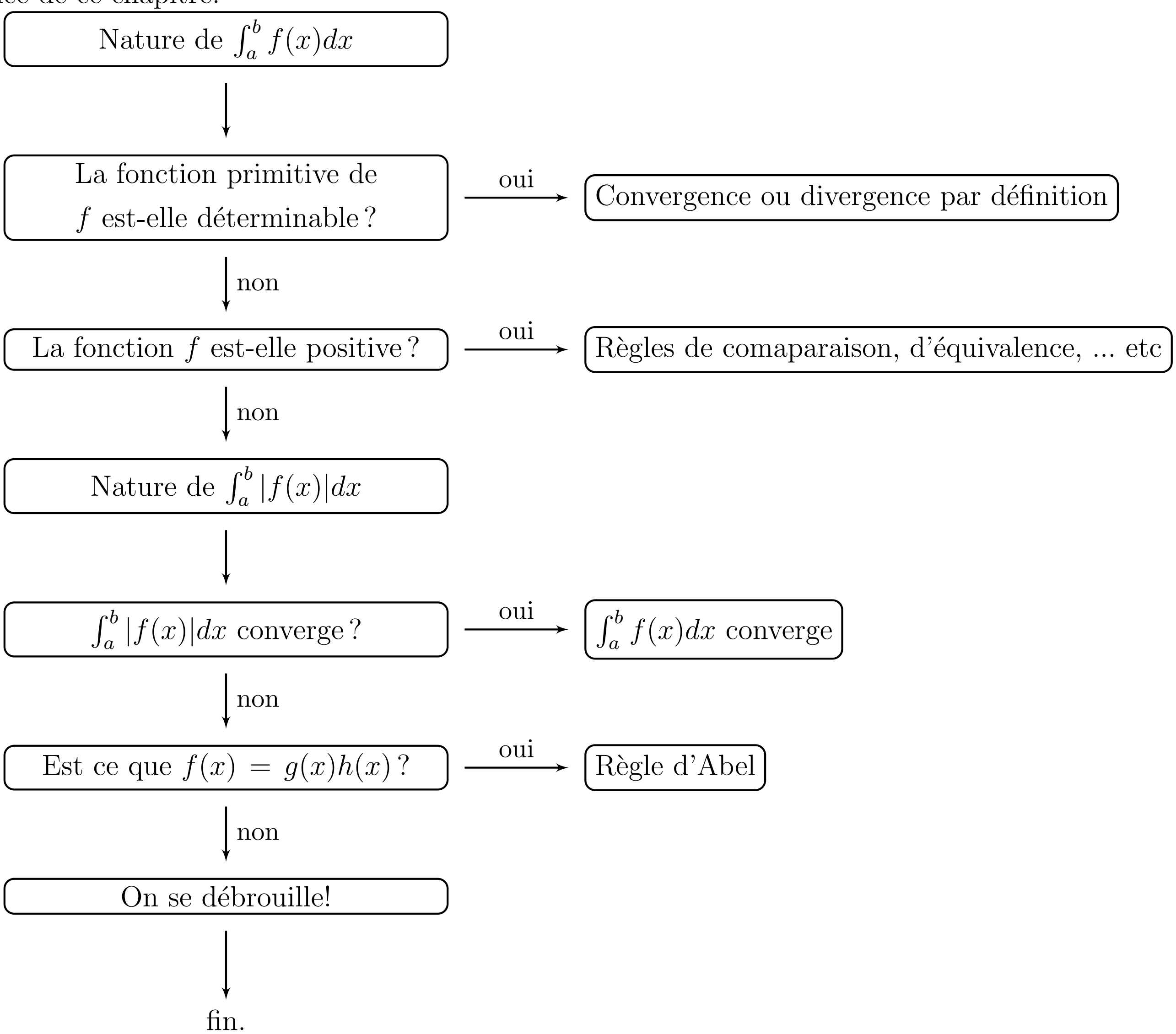
1) $\beta(p,q) = \beta(q,p)$.

2) $\beta(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

3) $\beta(p,q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}} du$.

2.6 Récapitulatif des techniques de convergence

Comme le premier chapitre, le schéma ci-dessus rassemble et résume les résultats de convergence de ce chapitre.



2.7 Exercices sur le chapitre 2

Exercice 2.1 Calculer les intégrales généralisées suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})}$,
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$,
3. $\displaystyle\int_0^{1} \ln(x)dx$,
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}dx$,
5. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(x)}{(1+x)^2}dx$,
6. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}dx$,
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx \quad (n\in\mathbb{N})$,
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^2}dx$,
9. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}dx$,
10. $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x(x+r)} \quad (a>0,\ r>0)$.

Exercice 2.2 Etudier la nature des intégrales généralisées suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx$,
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2}dx$,
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$,
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^5}{(x^4+1)\sqrt{x}}dx$,
5. $\displaystyle\int_0^{1} \sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$,
6. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2(x)}dx$,
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2+2x+7}dx$,
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+\sin(x)}{1+\sqrt{x^3}}dx$,
9. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(1+\sin(x))dx$.

Exercice 2.3

1) Etudier pour quelles valeurs du couple $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ l'intégrale $I(\alpha,\beta)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha(1+x^\beta)}dx$ converge.
2) Etudier pour quelles valeurs de $n\in\mathbb{N}$ l'intégrale $I(n)=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x^n}dx$ converge et calculer $I(n)$ dans ce cas.
3) Soit $I(\lambda)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\lambda)}dx$. Montrer que $I(\lambda)$ converge pour tout réel λ et calculer cette intégrale en utilisant le changement de variable $t=\frac{1}{x}$.

Exercice 2.4 (Concours 2013)

On considère les intégrales suivantes

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin(x)dx \qquad \text{et} \qquad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos(x)dx.$$

1) Montrer que l'intégrale I est impropre et qu'elle est convergente.
2) Calculer $\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$ et puis montrer que $I=J$.
3) Montrer que $I+J=-\frac{\pi\ln(2)}{2}+I$.

Exercice 2.5 Montrer que les intégrales suivantes sont semi-covergentes :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}dx$, **2**. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \cos(x^2)dx$ (poser $u = x^2$), **3**. $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2 \sin(x^4)dx$.

2.8 Corrigé des exercices sur le chapitre 2

Corrigé de l'exercice 2.1

1) La fonction $x \longmapsto \frac{1}{(1+e^x)(1+e^{-x})}$ est continue sur $[0, +\infty[$, on a donc a priori uniquement un problème en $+\infty$.

Pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a :

$$\int_0^t \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})} = \int_0^t \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx = \left[-\frac{1}{1+e^x}\right]_0^t = -\frac{1}{1+e^t} + \frac{1}{2},$$

alors

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})} = \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{1+e^t} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})}$ est donc convergente et on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})} = \frac{1}{2}$.

2) La fonction $x \longmapsto \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0, +\infty[$, on a donc a priori des problèmes en 0 et en $+\infty$.

- **Étude de** $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$:

  Pour tout $t \in]0, 1]$, on a :

  $$\int_t^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = -2\int_t^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{-2\sqrt{x}}dx = [-2e^{-\sqrt{x}}]_t^1 = -2e^{-1} + 2e^{-\sqrt{t}}$$

  et

  $$\lim_{t\to 0} \int_t^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to 0} -2e^{-1} + 2e^{-\sqrt{t}} = -2e^{-1} + 2.$$

  Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ est convergente et on a $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = -2e^{-1} + 2$.

- **Étude de** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$:
  Pour tout $t \in [1, +\infty[$, on a :

$$\int_1^t \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = -2\int_1^t \frac{e^{-\sqrt{x}}}{-2\sqrt{x}}dx = [-2e^{-\sqrt{x}}]_t^1 = -2e^{-\sqrt{t}} + 2e^{-1}$$

  et

$$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to+\infty} -2e^{-\sqrt{t}} + 2e^{-1} = 2e^{-1}.$$

  Donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ est convergente et on a $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2e^{-1}$.

- **Conclusion** : Les deux intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ sont convergentes, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ est convergente et on a

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx &= \int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx \\ &= -2e^{-1} + 2 + 2e^{-1} = 2.\end{aligned}$$

3) La fonction $x \longmapsto \ln(x)$ est continue sur $]0, 1]$, on a donc a priori uniquement un problème en 0.
Pour tout $t \in]0, 1]$, en intégrant par parties, on trouve

$$\int_t^1 \ln(x)dx = [x\ln(x) - x]_t^1 = -1 - t\ln(t) + t,$$

alors

$$\lim_{t\to 0}\int_t^1 \ln(x)dx = \lim_{t\to 0} -1 - t\ln(t) + t = -1.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)dx$ est donc convergente et on a $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)dx = -1$.

4) La fonction $x \longmapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$, on a donc a priori uniquement un problème en $+\infty$.
Pour tout $t \in [1, +\infty[$, en intégrant par parties, on trouve

$$\int_1^t \frac{\ln(x)}{x^2}dx = \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^t + \int_1^t \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^t = -\frac{\ln(t)}{t} - \frac{1}{t} + 1,$$

alors

$$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{\ln(x)}{x^2}dx = \lim_{t\to+\infty} -\frac{\ln(t)}{t} - \frac{1}{t} + 1 = 1.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}dx$ est donc convergente et on a $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}dx = 1.$

5) La fonction $x \longmapsto \frac{\ln(x)}{(1+x)^2}$ est continue sur $]0,1]$, on a donc a priori uniquement un problème en 0.

Pour tout $t \in]0,1]$, en intégrant par parties, on trouve

$$\begin{aligned}
\int_t^1 \frac{\ln(x)}{(1+x)^2}dx &= \left[-\frac{\ln(x)}{1+x}\right]_t^1 + \int_t^1 \frac{1}{x(1+x)}dx \\
&= \left[-\frac{\ln(x)}{1+x}\right]_t^1 + \int_t^1 \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}dx \\
&= \left[-\frac{\ln(x)}{1+x} + \ln(x) - \ln(1+x)\right]_t^1 \\
&= \left[\frac{x\ln(x)}{1+x} - \ln(1+x)\right]_t^1 \\
&= -\ln(2) - \frac{t\ln(t)}{1+t} + \ln(1+t),
\end{aligned}$$

alors

$$\lim_{t\to 0}\int_t^1 \frac{\ln(x)}{(1+x)^2}dx = \lim_{t\to 0} -\ln(2) - \frac{t\ln(t)}{1+t} + \ln(1+t) = -\ln(2).$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(x)}{(1+x)^2}dx$ est donc convergente et on a $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(x)}{(1+x)^2}dx = -\ln(2).$

6) La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ est continue sur $[2,+\infty[$, on a donc a priori uniquement un problème en $+\infty$.

Pour tout $t \in [2,+\infty[$, on a :

$$\int_2^t \frac{1}{x\ln(x)}dx = \int_2^t \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}dx = [\ln\ln(x)]_2^t = \ln\ln(t) - \ln\ln(2),$$

alors

$$\lim_{t\to+\infty}\int_2^t \frac{1}{x\ln(x)}dx = \lim_{t\to+\infty} \ln\ln(t) - \ln\ln(2) = +\infty.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln(x)}dx$ est donc divergente.

7) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \longmapsto x^n e^{-x}$ est continue sur $[0, +\infty[$, on a donc a priori uniquement un problème en $+\infty$.
En intégrant par parties n fois, on trouve

$$\int x^n e^{-x} dx = -\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} x^k e^{-x},$$

donc

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx &= \lim_{t \to +\infty} \int_0^t x^n e^{-x} dx \\ &= \lim_{t \to +\infty} \left[-\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} x^k e^{-x} \right]_0^t \\ &= \lim_{t \to +\infty} -\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} t^k e^{-t} + n! = n!. \end{aligned}$$

8) La fonction $x \longmapsto \frac{\arctan(x)}{1+x^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, on a donc a priori uniquement un problème en $+\infty$.
Pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a :

$$\int_0^t \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \arctan^2(x) \right]_2^t = \frac{1}{2} \arctan^2(t) - \frac{1}{2} \arctan^2(0) = \frac{1}{2} \arctan^2(t),$$

alors

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^t \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{2} \arctan^2(t) = \frac{\pi^2}{8}.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx$ est donc convergente et on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi^2}{8}$.

9) La fonction $x \longmapsto \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, on a donc a priori des problèmes en 0 et en $\frac{\pi}{2}$.

- **Étude de** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}} dx$:
  Pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{4}]$, on a :

$$\int_t^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}} dx = \int_t^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos(2x)}{2\sqrt{\sin(2x)}} dx = \left[\sqrt{\sin(2x)} \right]_t^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \sqrt{\sin(2t)}$$

  et

$$\lim_{t \to 0} \int_t^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}} dx = \lim_{t \to 0} 1 - \sqrt{\sin(2t)} = 1.$$

Donc l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}dx$ est convergente et on a $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}dx = 1$.

- **Étude de** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}dx$:
  Pour tout $t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$, on a :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{t} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{t} \frac{2\cos(2x)}{2\sqrt{\sin(2x)}}dx = \left[\sqrt{\sin(2x)}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{t} = \sqrt{\sin(2t)} - 1$$

et

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{t} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}dx = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin(2t)} - 1 = -1.$$

Donc l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}dx$ est convergente et on a $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}dx = -1$.

- **Conclusion** : Les deux intégrales $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}dx$ et $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}dx$ sont convergentes, alors $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}dx$ est convergente et on a

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}dx \\ &= 1 - 1 = 0.\end{aligned}$$

10) La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x(x+r)}$ est continue sur $[a, +\infty[$, on a donc a priori uniquement un problème en $+\infty$.
Pour tout $x \in [a, +\infty[$, on a :

$$\frac{1}{x(x+r)} = \frac{1 + \frac{x}{r} - \frac{x}{r}}{x(x+r)} = \frac{1 + \frac{x}{r}}{x(x+r)} - \frac{\frac{x}{r}}{x(x+r)} = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+r}\right].$$

Alors, pour tout $t \in [a, +\infty[$

$$\begin{aligned}\int_a^t \frac{1}{x(x+r)}dx &= \frac{1}{r}\int_a^t \frac{1}{x} - \frac{1}{x+r}dx \\ &= \frac{1}{r}\left[\ln(x) - \ln(x+r)\right]_a^t \\ &= \frac{1}{r}\left[\ln\left(\frac{x}{x+r}\right)\right]_a^t \\ &= \frac{1}{r}\left[\ln\left(\frac{t}{t+r}\right) - \ln\left(\frac{a}{a+r}\right)\right]\end{aligned}$$

et

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t \frac{1}{x(x+r)}dx = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{r}\left[\ln\left(\frac{t}{t+r}\right)-\ln\left(\frac{a}{a+r}\right)\right] = -\frac{1}{r}\ln\left(\frac{a}{a+r}\right).$$

L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{1}{x(x+r)}dx$ est donc convergente et on a $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{1}{x(x+r)}dx = -\frac{1}{r}\ln\left(\frac{a}{a+r}\right)$.

Corrigé de l'exercice 2.2

1) La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$ est continue sur $[1,+\infty[$, on a donc a priori uniquement un problème en $+\infty$.

Pour tout $x \in [1,+\infty[$, on a :

$$0 < \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}},$$

donc

$$\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} \sim_{+\infty} \frac{1}{x^2}.$$

$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ est une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$), alors d'après le critère d'équivalence $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx$ converge.

2) La fonction $x \longmapsto \frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$, on a donc a priori des problèmes en 0 et en $+\infty$.

- **Étude de** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2}dx$.

  On a :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2} = 0,$$

  donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2}dx$ converge.

- **Étude de** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2}dx$.

  On a :

$$\begin{aligned}\frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2} &= \frac{x\ln(x)}{x^4}\frac{1}{(1+\frac{1}{x^2})^2}\\ &\sim_{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^3} = \frac{1}{x^3\ln^{-1}(x)}.\end{aligned}$$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3 \ln^{-1}(x)} dx$ est une intégrale de Bertrand convergente ($\alpha = 2 > 1,\ \beta = -1$), alors d'après le critère d'équivalence $\int_1^{+\infty} \frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2} dx$ converge.

- **Conclusion :** Les intégrales $\int_0^1 \frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2} dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2} dx$ sont convergentes, on en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2} dx$ converge.

3) La fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, on a donc a priori uniquement un problème en $+\infty$.
On a :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x^2} = 0,$$

d'après la règle de Riemann, $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge.
Puisque l'intégrale $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ ne pose pas de problème (intégrale d'une fonction continue sur le segment $[0, 1]$), par la somme on a que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge.

4) La fonction $x \longmapsto \frac{x^5}{(x^4+1)\sqrt{x}}$ est continue sur $]0, +\infty[$, on a donc a priori des problèmes en 0 et en $+\infty$.

- **Étude de** $\int_0^1 \frac{x^5}{(x^4+1)\sqrt{x}} dx$.
On a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^5}{(x^4+1)\sqrt{x}} = 0,$$

donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{x^5}{(x^4+1)\sqrt{x}} dx$ converge.

- **Étude de** $\int_1^{+\infty} \frac{x^5}{(x^4+1)\sqrt{x}} dx$.
On a :

$$\begin{aligned} \frac{x^5}{(x^4+1)\sqrt{x}} &= \frac{x^5}{x^4\sqrt{x}} \frac{1}{1+\frac{1}{x^4}} \\ &\sim_{+\infty} \frac{x^5}{x^4\sqrt{x}} = \sqrt{x}. \end{aligned}$$

$\int_1^{+\infty} \sqrt{x} dx$ est une intégrale de Riemann divergente ($\alpha = \frac{-1}{2} < 1,$), alors d'après le critère d'équivalence $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^5}{(x^4+1)\sqrt{x}}dx$ diverge.

- **Conclusion :** Puisque $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^5}{(x^4+1)\sqrt{x}}dx$ converge et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^5}{(x^4+1)\sqrt{x}}dx$ diverge on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^5}{(x^4+1)\sqrt{x}}dx$ diverge.

5) La fonction $x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue sur $]0,1]$, on a donc a priori uniquement un problème en 0.
Pour tout $x \in]0,1]$, on a :

$$\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1,$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 dx$ converge, donc par le théorème de comparaison des fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| dx$ converge et donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$ converge également.

6) La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x\ln^2(x)}$ est continue sur $[2,+\infty[$, on a donc a priori uniquement un problème en $+\infty$.
Pour tout $t \in [2,+\infty[$, on a :

$$\int_2^t \frac{1}{x\ln^2(x)}dx = \int_2^t \frac{\frac{1}{x}}{\ln^2(x)}dx = \left[-\frac{1}{\ln(x)}\right]_2^t = -\frac{1}{\ln(t)} + \frac{1}{\ln(2)},$$

alors

$$\lim_{t\to+\infty} \int_2^t \frac{1}{x\ln^2(x)}dx = \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{\ln(t)} + \frac{1}{\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)}.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2(x)}dx$ est donc convergente.

7) La fonction $x \longmapsto \frac{\arctan(x)}{x^2+7x+2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, on a donc a priori uniquement un problème en $+\infty$.
Pour tout $x \in [0,+\infty[$, on a :

$$0 \leq \frac{\arctan(x)}{x^2+7x+2} \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{1+x^2}.$$

Or, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\frac{\pi}{2}}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}\left[\arctan(x)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$ donc convergente, d'après le théorème de comparaison $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2+7x+2}$ converge.

8) La fonction $x \longmapsto \frac{1+\sin(x)}{1+\sqrt{x^3}}$ est continue sur $[0,+\infty[$, on a donc a priori uniquement un problème en $+\infty$.
Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$0 \leq \frac{1+\sin(x)}{1+\sqrt{x^3}} \leq \frac{2}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ est une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = \frac{3}{2} > 1$), alors d'après le critère de comparaison $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+\sin(x)}{1+\sqrt{x^3}}dx$ converge.
Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1+\sin(x)}{1+\sqrt{x^3}}dx$ ne pose pas de problème (intégrale d'une fonction continue sur le segment $[0,1]$), par somme on a que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+\sin(x)}{1+\sqrt{x^3}}dx$ converge.

9) La fonction $x \longmapsto \ln(1+\sin(x))$ est continue sur $]-\frac{\pi}{2},0]$, on a donc a priori uniquement un problème en $-\frac{\pi}{2}$.
Posons $u = x+\frac{\pi}{2}$, on trouve que les intégrales $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(1+\sin(x))dx$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1-\cos(u))du$ sont de même nature. Or, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1-\cos(u))du$ a un problème en 0.
Au voisinage de 0, on a $\cos(u) = 1-\frac{u^2}{2}+o(u^4)$, donc

$$\begin{aligned}
\ln(1-\cos(u)) &= \ln(\frac{u^2}{2}+o(u^4)) \\
&= \ln(u^2)+\ln(\frac{1}{2}+o(u^2)) \\
&= 2\ln(u)+\ln(\frac{1}{2}+o(u^2)) \\
&= 2\ln(u)\left(1+\frac{\ln(\frac{1}{2}+o(u^2))}{2\ln(u)}\right) \\
&\sim_0 2\ln(u).
\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_0^{1} \ln(u)du$ converge, d'après le théorème d'équivalence $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1-\cos(u))du$ converge.
Par conséquent $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(1+\sin(x))dx$ converge.

Corrigé de l'exercice 2.3

1) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x^\alpha(1+x^\beta)}$ est continue sur $]0, +\infty[$, on a donc a priori des problèmes en 0 et en $+\infty$.

Pour étudie la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$, on cherche un équivalent simple en 0 et en $+\infty$ de la fonction $f(x)$. Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{x^\alpha(1+x^\beta)} &= \frac{1}{x^\alpha} \times \frac{1}{1+x^\beta} \\ &= \frac{1}{x^{\alpha+\beta}} \times \frac{x^\beta}{1+x^\beta}. \end{aligned}$$

Donc on distingue trois cas selon le signe de β. On peut résumer ce que l'on obtient dans le tableau suivant :

	$f(x) \sim_0$	$f(x) \sim_{+\infty}$	condition de convergence de $\int_0^1 f(x)dx$	condition de convergence de $\int_1^{+\infty} f(x)dx$	condition de convergence de $\int_0^{+\infty} f(x)dx$
$\beta > 0$	$\frac{1}{x^\alpha}$	$\frac{1}{x^{\alpha+\beta}}$	$\alpha < 1$	$\alpha + \beta > 1$	$\begin{cases} \beta > 0 \\ \alpha < 1 \\ \alpha + \beta > 1 \end{cases}$
$\beta = 0$	$\frac{1}{2x^\alpha}$	$\frac{1}{2x^\alpha}$	$\alpha < 1$	$\alpha > 1$	diverge $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
$\beta < 0$	$\frac{1}{x^{\alpha+\beta}}$	$\frac{1}{x^\alpha}$	$\alpha + \beta < 1$	$\alpha > 1$	$\begin{cases} \beta < 0 \\ \alpha > 1 \\ \alpha + \beta < 1 \end{cases}$

Alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge si et seulement si $\begin{cases} \beta > 0 \text{ et } \alpha < 1 \text{ et } \alpha + \beta > 1, \\ \text{ou} \\ \beta < 0 \text{ et } \alpha > 1 \text{ et } \alpha + \beta < 1. \end{cases}$

2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n \ln^{-1}(x)} dx$ est une intégrale de Bertrand ($\alpha = n$ et $\beta = -1$), donc convergente si et seulement si $n \geq 2$. En intégrant par parties, on trouve

$$\begin{aligned}
I(n) = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n}dx &= \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{\ln(x)}{x^n}dx = \lim_{t\to+\infty} \left[-\frac{\ln(x)}{(n-1)x^{n-1}}\right]_1^t + \frac{1}{n-1}\int_1^t \frac{1}{x^n}dx \\
&= \lim_{t\to+\infty} \left[-\frac{\ln(x)}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)^2x^{n-1}}\right]_1^t \\
&= \lim_{t\to+\infty} -\frac{\ln(t)}{(n-1)t^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)^2t^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)^2}. \\
&= \frac{1}{(n-1)^2}.
\end{aligned}$$

3) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto f(x) = \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\lambda)}$ est continue sur $]0, +\infty[$, on a donc a priori des problèmes en 0 et en $+\infty$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in]0, +\infty[$, on a :

$$0 < f(x) = \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\lambda)} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

Or, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}[\arctan(x)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$ donc convergente, d'après le théorème de comparaison $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\lambda)}dx$ converge.

En posant $t = \frac{1}{x}$, on a $x = \frac{1}{t}$ donc $dx = -\frac{dt}{t^2}$, et l'on obtient

$$I(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{t^\lambda}{(1+t^2)(1+t^\lambda)}dt.$$

Alors

$$\begin{aligned}
2I(\lambda) &= \int_0^{+\infty} \frac{t^\lambda}{(1+t^2)(1+t^\lambda)}dt + \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+t^\lambda)}dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = [\arctan(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 2.4

1) La fonction $x \longmapsto \ln\sin(x)$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, on a donc a priori uniquement un problème en 0, pour la convergence de l'intégrale on a :

$$\begin{aligned}
\ln\sin(x) &= \ln\left(x\frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) \\
&= \ln(x)\left[1 + \frac{\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}{\ln(x)}\right] \\
&\sim_0 \ln(x) \quad \text{car} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}{\ln(x)} = 0.
\end{aligned}$$

$\int_0^1 \ln(x)dx$ converge, d'après le théorème d'équivalence $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin(x)dx$ converge.

2) Sachant que $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(-t) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(-t) = \cos(t).$$

Pour montrer que $I = J$, on considère le changement de variables $x = \frac{\pi}{2} - t$, on a : $t = \frac{\pi}{2} - x$ et $dx = -dt$, et l'on obtient

$$\begin{aligned} I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin(x)dx &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos(t)dt = J. \end{aligned}$$

3) Calculons $I + J$

$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin(x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\ln\sin(x) + \ln\cos(x)]\, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)\cos(x))\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x)) - \ln(2)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x))\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2)dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x))\, dx - \frac{\pi}{2}\ln(2). \end{aligned}$$

Considérons en premier lieu, le changement de variable $t = 2x$ alors :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x))\, dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(t))\, dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\, dt + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(t))\, dt \\ &= \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(t))\, dt. \end{aligned}$$

Considérons maintenant, le changement de variable $u = \pi - t$ on a :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(t))\, dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(\sin(\pi - u))\, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin(u)du = I.$$

D'où

$$I + J = -\frac{\pi}{2}\ln(2) + I \Longrightarrow I = J = -\frac{\pi}{2}\ln(2).$$

Corrigé de l'exercice 2.5

1) La fonction $x \longmapsto \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$ est continue sur $[1, +\infty[$, donc localement intégrable.
Posons $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $g(x) = \cos(x)$, on a :

- La fonction f est positive et décroissante sur $[1, +\infty[$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x) = 0$.
- Pour tout $t \in [1, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_1^t g(x)dx \right| &= \left| \int_1^t \cos(x)dx \right| \\ &= \left| [\sin(x)]_1^t \right| = |\sin(t) - \sin(1)| \\ &\leq 2. \end{aligned}$$

D'après le critère d'Abel, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$ converge.
D'autre part, pour tout $x \in [1, +\infty[$

$$\left| \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} \right| \geq \frac{\cos^2(x)}{\sqrt{x}} = \frac{1 + \cos(2x)}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\cos(2x)}{2\sqrt{x}}.$$

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ diverge et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{2\sqrt{x}} dx$ converge, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} \right| dx$ diverge. Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$ est semi-convergente.

2) La fonction $x \longmapsto \cos(x^2)$ est continue sur $[1, +\infty[$, donc localement intégrable.
En utilisant le changement de variable $u = x^2$, on trouve que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \cos(x^2)dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{2\sqrt{u}} du$ ont la même nature.
Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{2\sqrt{u}} du$ est semi-convergente, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \cos(x^2)dx$ est semi-convergente.

3) La fonction $x \longmapsto x^2 \sin(x^4)$ est continue sur $[1, +\infty[$, donc localement intégrable.
En utilisant le changement de variable $u = x^4$, on trouve que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2 \sin(x^4)dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{4\sqrt[4]{u^3}} du$ ont la même nature.
Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{4\sqrt[4]{u^3}} du$ est semi-convergente, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2 \sin(x^4)dx$ est semi-convergente.

Bibliographie

[1] E. Azoulay, J. Avignant, *Analyse Mathématiques*, Tome 1., McGraw-Hill, 1983.

[2] M. Aassila, 400 *Exercices corrigés d'analyse avec rappels de cours*, ellipses, paris, 2014.

[3] K. Allab, *Éléments d'analyse*, Tome 1 et 2., O.P.U, 2007.

[4] Y. Bougrouv, S. Nikolsk, *Cours de mathématiques supérieures*, Tome 1., Mir, Moscou, 1983.

[5] J-M. Monier, *Analyse* 2*, Cours et* 600 *exercices corrigés*, DUNOD, paris, 1994.

[6] C. Servien, *Séries numériques, suites et séries de fonctions, Intégrales*, Ellipses, 1995.