المطلب الأول : شروط أسلوب التحليل التطويقي للبيانات

1- شروط استخدام أسلوب التحليل التطويقي للبيانات:

1-1 شروط متعلقة بحجم العينة:

بعد الدراسة التي أجراها **Cooper** مع مجموعة من الباحثين سنة 2006 خرج الباحث بمجموعة من التعليمات التي تضمن نجاح استعمال أسلوب DEA ، و الممثلة في تحقيق إحدى القواعد الثلاث التالية[1]:

القاعدة الأولى : يجب أن يكون حجم العينة أكبر من حاصل ضرب عدد المدخلات في عدد المخرجات، و إلا سيفقد النموذج قوته التمييزية بين الوحدات الكفؤة و الوحدات غير الكفؤة:

$$S_S \geq I \times O$$

حيث:

S_S : وحدات إتخاذ القرار (DMU).

I: المدخلات.

O : المخرجات .

القاعدة الثانية : يجب أن يكون حجم العينة أكبر من حاصل ضرب المدخلات مع المخرجات في العدد ثلاثة **3**

$$SS \geq 3\,(I+O)$$

القاعدة الثالثة : تسمى قاعدة الثلث، حيث يتم التأكد من جودة النموذج في النتائج المحصلة (بعكس القاعدتين الأوليتين حيث التأكد من جودة النموذج قبل إجراء التقييم) ، بحيث لا يجب أن يفوق عدد الوحدات ذات الكفاءة الكاملة (% 100) ثلث العينة المدروسة:

$$\text{DMU 100\% Efficients} \geq \frac{1}{3} S_S$$

لكن و رغم القيود التي تحد من إستعمال أسلوب في مجالات و حالات متعددة إلا أنه يمكن تطبيق بإستعمال تقنية تحليل النوافذ ، فهذه التقنية تعطي لأسلوب DEA القوة التمييزية عندما تكون عدد وحدات إتخاذ القرار قليلة و بالمقارنة عدد المدخلات و المخرجات كبير ، هذه التقنية التي تمكن من مقارنة DMU في سنوات متعددة ، و بهذا الأسلوب يصبح لدينا عدة وحدات إتخاذ قرار يساوي (T=n

[1] A. Manzoni, S.M.N. Islam, **Performance Measurement in Corporate Governance,** Physica-Verlag Heidelberg, 2009, p. 119.

(k × حيث n تمثل عدد DMU في السنة الواحدة ،(عددDMU في كل السنوات ثابت) ، و k تمثل عدد السنوات ، و لكن لتمييز التأثير التكنولوجي يجب أن يكون عدد السنوات كبيرا نوعا ما ، فمثلا 6 بنوك لمدة 3 سنوات (T= 18) لا يسمح بتمييز التطور التكنولوجي ، ليكون مؤشر Malmquist جيدا في التمييز[1].

2-1 شروط متعلقة بالنماذج :

حسب الدراسة التي خرج بها **Seinford** فإن عملية اختيار نموذج من بين نماذج التحليل التطويقي للبيانات يكون تبعا للفروض التالية[2]:

- نوعية جدار التغليف :سواءا ميل خطي أو ميل خطي لوغاريتمي ، و كون هذا الميل ينبع من نقطة الأصل أو لا.

- عوائد الحجم أو الغلة : سواءا ثابتة أو متغيرة.

- نوعية التوجه :توجه مدخلي، و به نحدد الكفاءة القائمة على الاقتصاد في المدخلات، أو توجه مخرجي يبين لنا الكفاءة التي يكون شرطها الوحيد تعظيم المخرجات، أو الأخذ بالتوجهين في آن واحد أو عدم الأخذ بهما.

- تقاس كفاءة وحدة القرار بإسقاط إحداثياتها على جدار الحيز المتكون من الوحدات الكفؤة، و الذي يطوق المنطقة التي يمكن لأي وحدة قرار-منشأة -الإنتاج فيها ، و المسافة الفاصلة بين النقطة الحقيقية و النقطة المسقطة تمثل عدم الكفاءة، أما مكان تواجد النقطة المسقطة في المساحة المطوقة فيكون مرتبط بنوعية نموذج التحليل التطويقي للبيانات ، و أيضا تبعا لنوعية التوجه(Orientation)[3].

اضافة الى كل من الشروط السابقة يمكن اضافة شروط أخرى مهمة لنجاح الأسلوب نذكر منها[4] :

اختيار الوحدات المتماثلة : يجب على عملية قياس الكفاءة أن تشمل مجموعة من البنوك التجارية فيما بينها أو مجموعة من بنوك التنمية فيما بينها ، أو مجموعة من المؤسسات المالية المختصة فيما بينها ، و أساس هذا الشرط أن للبنوك التجارية على سبيل المثال شروط و قوانين تحكم نشاطها ، ولها نفس الموارد ، ونفس المخرجات ، وهو ما لا يتوفر في حالة عدم تماثل المؤسسات.

---

[1] William W. Cooper, Lawrence M. Seiford, Joe Zhu, Op. Cit., p. 374.

[2] منصوري عبد الكريم، مرجع سابق، ص 119.

[3]. Daniela Borodak, **Les outils d'analyse des performances productives utilisés en économie et gestion:** la mesure de l'efficience technique et ses déterminants, Cahier de recherche, №5, 2007, p. 6-7, p. 10.

[4] Zeen Okacha and Abdelkarim mensouri **Measuring the Relative Efficiency Of Algerian Banks By A Multi-Criteria Non-Parametric Technique**; Data Envelopment Analysis (DEA)2010 p 10- 9

- **العلاقة الخطية بين المدخلات و المخرجات :** أي توفر العلاقة الطردية بين المدخلات و المخرجات ، أي نظريا يجب أن تساهم زيادة المدخلات إلى زيادة في المخرجات ، و العكس صحيح ، أي أن انخفاض المخرجات يجب أن يكون نتيجة لانخفاض المدخلات.

- يجب أن يعبر على مدخلات ومخرجات كل وحدة بأرقام موجبة

– المتغيرات يجب أن تمثل بصدق العناصر الحقيقية المؤثرة في الكفاءة

- كمبدأ يجب أن توافق الكفاءة الجيدة المدخلات الأقل والمخرجات أكبر

- ليس من الضروري أن تتطابق وحدات القياس سواء للمدخلات أو المخرجات (قيم نقدية ،عدد أشخاص...)

المطلب الثاني: خصائص أسلوب التحليل التطويقي للبيانات:

لقد لقي أسلوب التحليل التطويقي للبيانات رواجا كبيرا في الآونة الأخيرة لتمتعه بمجموعة من الخصائص تميزه عن باقي الطرق التقليدية المستعملة في تقييم الأداء ، وبهذا الخصوص سنقوم بذكر مميزات وايجابيات هذا الأسلوب والتي من بينها ما يلي[1]:

– يمكن من تلخيص أداء كل وحدة في صورة مؤشر أداء واحد للكفاءة.

– يساعد على تحديد سبل تحسين الكفاءة لكل وحدة من وحدات من خلال تحديد وضع الوحدات غير كفؤة على منحنى الكفاءة.

– يسمح بمقارنة كل وحدة إنتاج بأكفأ وحدة أو توليفة من الوحدات الكفؤة ،وهذا ما يساعد على معرفة مصادر عدم

الكفاءة للوحدات التي لا تقع على منحنى الكفاءة.

– يوفر وحدات مناظرة Peer units والتي يمكن للوحدات الأخرى النظر إليها لتحسين عملياتها.

– يرتكز على أساس منحنى أفضل اداءBest practice .

– له قدرة على الكشف على علاقات مخفية ومن تم مصادر انعدام أو ضعف الكفاءة.

– الأوزان الترجيحية للمدخلات والمخرجات غير معروفة أو محددة مسبقا وليست واحدة بالنسبة لجميع الوحدات بل تحسب ضمن عملية التقدير كي تناسب الوحدة الخاصة بها، ولاشك أن هذه الخاصية

---

[1] أنظر كل من:

محمد شامل بهاء الدين مصطفى فهمي، **قياس الكفاءة النسبية للجامعات الحكومية بالمملكة العربية السعودية** ، مجلة جامعة أم القرى للعلوم التربوية والنفسية، المجلد الأول، العدد الأول، جانفي 2009 ، ص254 .-256.

محمد جموعي قريشي، **قياس كفاءة الخدمات الصحية في امستشفيات الجزائرية** ، مجلة الباحث، العدد الأول 11-2012، ص14.

عمراوي زينب، مرجع سابق، ص 157-158.

ايمان بية، إلياس بن ساسي، **تطبيق أسلوب التحليل التطويقي للبيانات في قياس الكفاءة النسبية لمؤسسات التعليم العالي الجزائرية في ظل ادارة التغيير** ، مجلة أداء المؤسسات الجزائرية، العدد 08-2015، ص 96-97.

المميزة لأسلوب DEA تكسبه موضوعية خاصة في تقدير وتحديد التحسينات المطلوبة من الوحدات غير الكفؤ ة.

- يسمح بعدم التقيد بنوع البيانات المستعملة أو العلاقة فيما بين هذه المتغيرات كما هو الحال في نماذج الانحدار مثلا أي أن المدخلات والمخرجات يمكن أن تكون كمية أو نوعية، فأسوب DEA يسمح بتعدد المدخلات والمخرجات والتي يمكن

التعبير عنها بوحدات قياس مختلفة الأمر الذي يجعل من هذا التحليل مناسبا لتحليل كفاءة الوحدات التي تقدم خدمات يصعب تقييمها، على سبيل المثال وحدات الخدمات الحكومية التي تقدم مخرجات يستحيل تحديد أسعارها.

- يجمع هذا الأسلوب في قياسه للكفاءة بين الكفاءة الداخلية بشقيها (الكمية والنوعية) وبين الكفاءة الخارجية، حيث يمكن للأسلوب التعامل مع المتغيرات) العوامل (الوصفية التي يصعب قياسها ،مثل رضا الطلبة على الخدمات التعليمية المقدمة

- لا يتطلب صيغة محددة للعلاقة الدالية لدالة الإنتاج أو التكاليف حيث لا توجد قيود حول الشكل الدالي الذي يربط المدخلات بالمخرجات وبهذا يصبح أكثر مرونة في إبراز الفروق بين وحدات صناعة القرار.

- يصنف أسلوب **DEA** كأحسن وسيلة للمقارنة المرجعية **(Benchmark)**نظرا لتميزه بتحديد أحسن الوحدات النظيرة بالنسبة للوحدات غير الكفؤة، بالاعتماد على مدخلات و مخرجات متعددة.

ورغم كل ها ته الخصائص والمميزات التي يتمتع بها أسلوب التحليل التطويقي للبيانات ، الا أن هناك مجموعة من القيود وأوجه قصور فيه ينتج عنها العديد من المشاكل ، حيث كان الزامي التعرف عليها من أجل أخذها بعين الاعتبار عند استخدام البرنامج أو في تحليل نتائج الأسلوب نذكر من بينها ما[1]:

- لعل أهم عائق هو مسألة تحديد نوعية المخرجات المستخدمة ، فلو ركزنا على المخرجات الكمية فقط ، دون النظر إلى الجانب النوعي قد نقع في التحيز درجات الكفاءة عالية لكن قد يعبر الواقع عن انخفاض في جودة هذه المؤسسات.

- نتائج تطبيق هذا الأسلوب تكون على عينة معينة (وحدات متجانسة).

---

[1] أنظر كل من:

M.Abbott & C.Doucouliagos , **The Efficiency of Australian Universities: A Data Envelopment Analysis**, Economics of Education Review, Volumes 22,N°1 ,2003, p.91-92.

علي بن صالح علي الشايع، **قياس الكفاءة النسبية للجامعات السعودية باستخدام تحليل مغلف البيانات**، أطروحة دكتوراه غير منشورة، جامعة أم القرى، المملكة العربية السعودية، 1428-1429، ص73.

Tomáš Rosenmayer, **Using Data Envelopment Analysis: a Case of Universities**, review of economic perspectives – národohospodářský obzor, vol 14, n°1, 2014, p.41.

ايمان بية، إلياس بن ساسي، مرجع سابق، ص 96.

- خطأ القياس قد يتسبب في مشاكل ذات أهمية بالغة ،خصوصا إذا كان هناك نقاط متطرفة في العينة المختارة.

- نتائج هذا التحليل نسبية وليست مطلقة فهو يبين أفضل الممارسات التي تمت المقارنة بينها ،وليست أفضلها على الإطلاق.

عدم وجود أسعار يعني أن الـــ DEA يعطينا تحليل لمقاييس الكفاءة التقنية ،وليس الكفاءة الاقتصادية . وهذا لأن الـــDEA يكشف عن مدى كفاءة المدخلات المستخدمة لإنتاج المخرجات ،ولكن لا يعطينا دلائل عم ا إذا كانت الوحدات التي تتسم بالكفاءة يمكن أن نخفض من تكاليفها أو نحسن قيمة مخرجاتها من خلال اختيار تركيبات مختلفة من المدخلات أو المخرجات. ومع ذلك، تبقى المعلومات المتعلقة بالكفاءة التقنية المتحصل عليها باستخدام الـــ.DEA ذات فائدة كبيرة لتقييم وتحسين أداء وحدات اتخاذ القرار عندما تكون معلومات الأسعار معدومة أو محدودة .

المطلب الثالث: أهم نماذج أسلوب التحليل التطويقي للبيانات:

عرف أسلوب التحليل التطويقي للبيانات منذ نشأته مجموعة من التغيرات في نموذجه وصيغته الأصلية، وفي هذا المطلب سنقوم بالتطرق لأهم نماذج هذا الأسلوب والتي من بينها نموذج اقتصاديات الحجم الثابتة CRS ونموج اقتصاديات الحجم المتغيرة VRS ، ثم سنقوم أهم الفروق بين النموذجين.

1 نموذج اقتصاديات الحجم الثابتة (CRS):

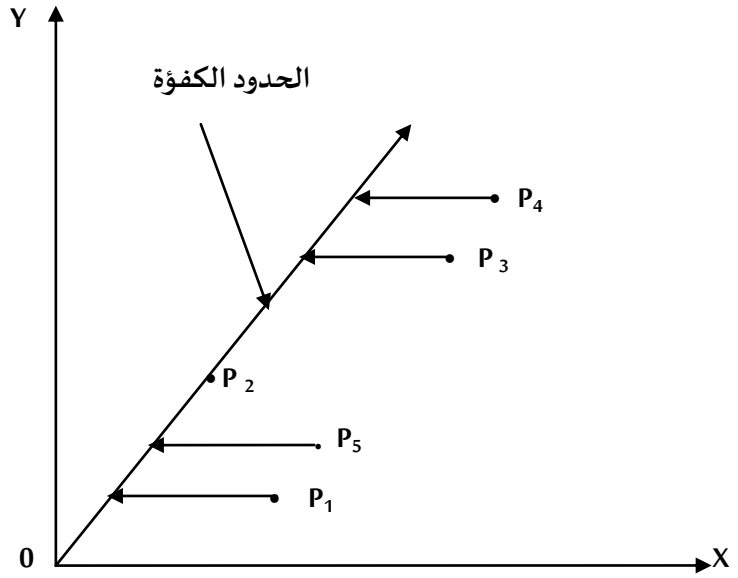
1-1 مفهوم نموذج اقتصاديات الحجم الثابتة (CRS):

هو النموذج الأساسي الذي قام بوضعه كل من Rhodes and Cooper, Charnes ، ويعتمد هذا النموذج على أساس أن التغير في كمية المدخلات التي تستخدمها الوحدة غير الكفء يؤثر تأثيرا ثابتا في كمية المخرجات التي تقدمها وقت تحركها إلى الحدود الكفؤة ، وهذه الخاصية تعرف بخاصية ثبات العائد على الإنتاج (Constant Return To Scale CRS) وتعتبر هذه الخاصية ملائمة فقط عندما تكون جميع الوحدات محل المقارنة تعمل في مستوى أحجامها المثلى ، لكن في الواقع توجد كثير من العوائق تمنع الوحدات من تحقيق هذه الاحجام كالمنافسة غير التامة ، قسود التمويل وغيرها[1].

وبهذا يمكن لوحدة اتخاذ القرار غير الكفؤة من أن تصبح كفؤة بنموذج CRS بإسقاط إحداثياتها على الحدود الكفؤة ، فمن التوجه المدخلي نتمكن من تحسين (تخفيض) المدخلات ، بينما من ناحية التوجه المخرجي يمكننا تحسين (زيادة) المخرجات وبالتالي يعتمد تحسين الوحدات غير الكفؤة على موقع جدار الحدود سواء مدخلي أو مخرجي، والشكلين المواليين يوضحان ذلك أكثر:

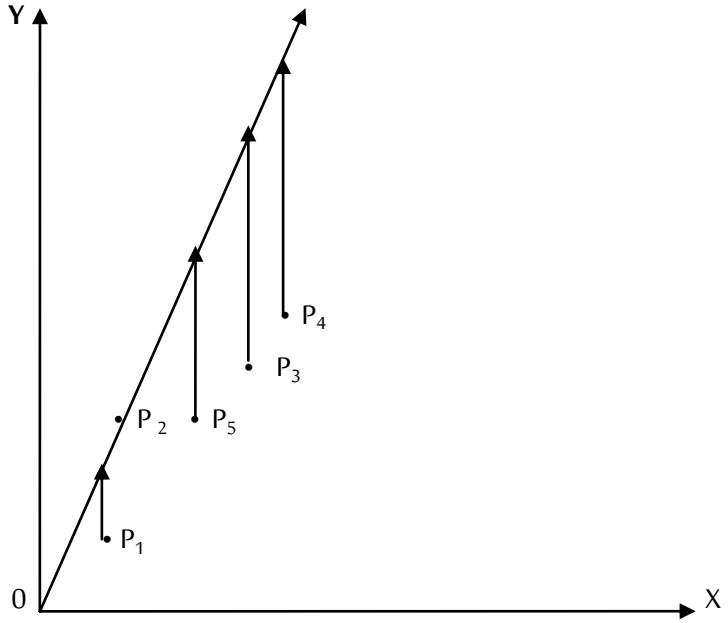
[1] محمد شامل بهاء الدين مصطفى فهمي ، مرجع سبق ذكره، ص23.

الشكل رقم 3-1: نموذج CRS بالتوجه المدخلي:



Source :W.W.Cooper-L.M.Seiford-Joe Zhu,**Handbook on Data Envelopment Analysis** , Kluwer Academic Publishers , New York , USA, 2004, P 16.

شكل رقم 3-2 : نموذج CRS بالتوجه المخرجي



Source :W.W.Cooper-L.M.Seiford-Joe Zhu,**Handbook on Data Envelopment Analysis** , Kluwer Academic Publishers , New York , USA, 2004, P 16.

لتمثيل التوجه المدخلي لنموذج اقتصاديات الحجم الثابتة CRS نفترض أنه لدينا 5 وحدات DMU_S $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$ وبعد تمثيلها بيانيا كما في الشكل رقم 3-2 تظهر النتائج أن الوحدة P_2 تظهر كفؤة بينما بقية الوحدات تظهر غير كفؤة ،

ولتخفيض استعمالها من المدخل الواحد x يجب التوجه أفقيا الى محور المخرجات y ، ويعني هذا أننا نحافظ على نفس القدر من المخرجات لكن بتخفيض المدخلات بالنسبة او الكيفية التي تنتج بها الوحدة P_2 ، ويعبر السهم الرابط بين النقاط غير الكفؤة P_1, P_3, P_4, P_5 و منحنى الحدود الكفؤة عن نسبة عدم الكفاءة هذه الوحدات مع الجدار الذي ترسمه الوحدة الكفؤة P_2 ، بينما بالنسبة للوحدة P_2 فلكون أنها على الجدار الكفؤ فلا مجال للتحسين ، أي كفاءتها 100%.

نفس الشيء بالنسبة للتوجه المخرجي ، فإن هناك 5 وحدات DMU_S $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$ وبعد تمثيلها بيانيا كما تظهر في الشكل (3-3)، توضح النتائج أن الوحدة P_2 كفؤة بينما بقية الوحدات تظهر غير كفؤة ، ولزيادة انتاجها من المخرج y يجب الاتجاه عموديا إلى محور المدخلات x ، ويعني هذا أننا نحافظ على نفس القدر من المدخلات لكن بزيادة المخرجات بالنسبة أو الكيفية التي تنتج بها الوحدة P_2 ، ويعبر السهم الرابط بين الوحدات غير الكفؤة P_1, P_3, P_4, P_5 ومنحنى الحدود الكفؤة عن مقدار عدم كفاءة هاته الوحدات بالمقارنة مع الجدار الذي ترسمه الوحدة الكفؤة P_2، بينما الوحدة P_2 فلكون أنها على الجدار الكفؤ فلا مجال للتحسين، أي أن كفاءتها 100% ، وتجدر الاشارة أن تساوي مؤشرات الكفاءة بالتوجه المدخلي وبالتوجه المخرجي لا يكون إلا في نموذج CRS.[1]

2-1 الصيغة الرياضية لنموذج CRS:

1-2-1 فرضيات وقيود النموذج:

لكل نموذج مجموعة من القيود التي يجب تتوفر في متغيراته ولنموذج CRS مجموعة من الفرضيات يجب أن توضع في وحداته المختارة وفي مدخلات ومخرجات كل وحدة ، و تتمثل هذه الفرضيات في ما يلي [2]:

- يجب أن يعبر بأرقام موجبة للمدخلات والمخرجات لكل الوحدات
- المتغيرات (المدخلات، المخرجات واختيارDMU) يجب أن تمثل بصدق سواء للمحلل او المسير العناصر الحقيقية المؤثرة في الكفاءة.
- كمبدأ يجب أن تكون الكفاءة الجيدة تمثل المدخلات الأقل أو المخرجات الأكبر.
- ليس من الضروري أن تتطابق وحدات القياس سواء في المدخلات أو المخرجات (قيم نقدية، عدد أشخاص، أمتار ...الخ)

[1] William W. Cooper, Lawrence M. Seiford, Joe Zhu, Op. Cit., p. 15-17.

[2] W.W.Cooper and all , **Introduction To Data Envelopment Analysis And Its Uses**, Springer Sciences + Business Media, USA , 2006 , p 22.

2-2-1 الصيغة الرياضية لنموذج CRS بالتوجه المخرجي :

نفترض أنه لدينا n من وحدات اتخاذ القرار DMU :

$\{DMU_J : J=1,2,\ldots\ldots,n\}$

هذه الوحدات تنتج عدة مخرجات y_{rj} $(r=1,2,\ldots\ldots,s)$ وذلك باستخدام عدة مدخلات x_{ij} $(i=1,2,\ldots\ldots\ldots,n)$،[1]

حيث y_{rj} تعبر عن قيمة المخرج رقم r والمنتج من قبل وحدة اتخاذ القرار j ، و x_{ij} هي قيمة المدخل رقم i المستعمل من قبل وحدة اتخاذ القرار j.

والجدول الموالي رقم 3-1 يوضح الشكل الرياضي لأسلوب DEA ، حيث تمثل الرموز المتطرق اليها الى:

J : عدد وحدات اتخاذ القرار DMU التي يتم مقارنتها ببعضها البعض في أسلوب DEA.

DMU_j: وحدة اتخاذ القرار رقم .j

θ: مؤشر الكفاءة للوحدة تحت التقييم بأسلوب DEA

y_{rj} : قيمة المخرج رقم r والمنتج من قبل وحدة اتخاذ القرار j.

x_{ij} : هي قيمة المدخل رقم i المستعمل من قبل وحدة اتخاذ القرار j.

r: عدد المخرجات المنتجة من قبل كل وحدة اتخاذ القرارDMU.

i: عدد المدخلات المستعملة من قبل كل وحدة اتخاذ القرارDMU.

u_r : المعامل أو الوزن المخصص من قبل DEA للمخرج r ليبلغ درجة الكفاءة 100%.

v_i : المعامل أو الوزن المخصص من قبل DEA للمدخل i ليبلغ درجة الكفاءة 100%.

[1] Joe.Zhu, Wade.D.Cook , **Modeling Data Irregularities And Structural Complexities In Data Envelopment Analysis**, Springer Science + Business Media, New York, USA, 2007,p02 .

جدول رقم 3-1: النموذج الرياضي لأسلوب DEA

دالة الهدف:

$$Max\ \theta = \frac{U_1Y_{10}+U_2Y_{20}+\ldots+U_sY_{so}}{v_1x_{10}+v_2x_{20}+\cdots+v_mx_{mo}} = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}} \qquad (1)$$

أي : تعظيم مؤشر الكفاءة θ بالنسبة لوحدة اتخاذ القرار o .

وتكو دالة الهدف المذكورة تعمل تحت قيد أن : أي وحدة قرار ذات مجموعة المعاملات u و v المقيمة مع بقية الوحدات يجب أن لا تفوق أي وحدة قرار القيمة 1 (100%) ، التي تعني الكفاءة الكاملة وتكون الصياغة الرياضية لهذا الكلام كما يلي:

$$DMU_1 = \frac{U_1Y_{11}+U_2Y_{21}+\ldots+U_sY_{s1}}{v_1x_{11}+v_2x_{21}+\cdots+v_mx_{m1}} \leq 1$$

$$DMU_2 = \frac{U_1Y_{12}+U_2Y_{22}+\ldots+U_sY_{s2}}{v_1x_{12}+v_2x_{22}+\cdots+v_mx_{m2}} \leq 1$$

$$\vdots$$

$$DMU_0 = \frac{U_1Y_{10}+U_2Y_{20}+\ldots+U_sY_{so}}{v_1x_{10}+v_2x_{20}+\cdots+v_mx_{mo}} \leq 1$$

$$\vdots$$

$$DMU_j = \frac{U_1Y_{1j}+U_2Y_{2j}+\ldots+U_sY_{sj}}{v_1x_{1j}+v_2x_{2j}+\cdots+v_mx_{mj}} \leq 1 \qquad (2)$$

$$V_1, V_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, V_m \geq 0$$

$$U_1, U_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, U_s \geq 0$$

Source : H.Sherman David, ZHU Joe, **Service Productivity Management** , Spinger Science +Business Media , New York , USA, 2006, P64.

ولتحديد قيمة المعاملات U_r, Vi (coefficient) تستخدم احدى الطرق التالية[1]:

موضوعيا: (objectivement) : بحيث تستعمل تقنية حل البرمجة الخطية لإيجاد قيمة هذه المعاملات Vi, Ur والتي ستعطي للكسر الممثل بالمخرجات على المدخلات للوحدة المقيمة اكبر كفاءة ممكنة.

[1] طلحة عبد القادر، **قياس كفاءة المؤسسات التعليمية باستخدام التحليل التطويقي البيانات(DEA)**، دراسة حالة مؤسسات التعليم الثانوي في الجزائر، رسالة دكتوراه منشورة، جامعة أبو بكر بلقايد ، تلمسان، الجزائر، 2017، ص 49.

بطريقة ذاتية: (Subjectivement)

بحيث تكون هناك حرية اختيار قيم لهذه المعاملات من طرف القائم بالدراسة.

بطريقة تحكيمية : (Arbitrairement) وهنا تعطى قيم لهذه المعاملات بناء على دراسات سابقة.

3-2-1 الكفاءة وفق نموذج CRS:

تحدد درجة الكفاءة لوحدة اتخاذ القرار j وفق نموذج CRS من خلال قيمة مؤشر الكفاءة θ بحيث تكون [1]:

- وحدة اتخاذ القرار (DMU) لها كفاءة كاملة (Fully Efficient) إذا كان مؤشر الكفاءة $\theta = 1$ مع عدم امكانية تخفيض المدخلات أو الزياة في المخرجات ($S^{-*} = S^{+*} = 0$).
- وحدة اتخاذ القرار (DMU) لها كفاءة ضعيفة (Weakly Efficient) إذا كان مؤشر الكفاءة $\theta = 1$ مع امكانية تخفيض المدخلات أو الزيادة في المخرجات ($S^{-*} \neq 0$, $S^{+*} \neq 0$).
- وحدة اتخاذ القرار(DMU) غير كفؤة اذا كان مؤشر الكفاءة أقل من الواحد θ<1 .

4-2-1 الصيغة الخطية لنموذج CRS:

في هذا الجزء سنقوم بتحويل النموذج الكسري المذكور سابقا في الجدول (3-1) من خلال المعادلتين (1) و (2) الى برنامج خطي وذلك كون أن البرنامج السابق (الكسري) يطرح مشكل تعدد الحلول (عدد من الحلول لا نهاية له) فإذا كان (U^*, V^*) يعتبر حلا ، فإن (aU^*, aV^*) يعتبر حلا آخر كذلك .....الخ.

الصيغة الخطية لنموذج CRS [2]:

$$Max\ \theta = U_1Y_{10} + U_2Y_{20} + \dots + U_sY_{so} = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} \qquad (3)$$

S.C

$$v_1x_{10} + v_2x_{20} + \cdots + v_mx_{mo} = \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} = 1 \qquad (4)$$

$$DMU_0: \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} \leq \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} \qquad (5)$$

[1] Joe.Zhu, Wade.D.Cook , op cite , p 05 .
[2] Joe zhu – wade d cook , op cite , p 02 .

$V_1, V_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, V_m \geq 0.$

$U_1, U_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, U_r \geq 0.$

حيث أن:

- دالة الهدف تسعى الى تعظيم المخرجات (بسط دالة الهدف للبرنامج الكسري) وحدة اتخاذ القرار المقيمة (DMU_0) للوصول بها الى أعلى رجة كفاءة (100%) وهو ما تم تمثيله بالعبارة (3).
- القيد الأول الممثل بالعبارة رقم (4) ناتج عن تحويل دالة الهدف السابقة للبرنامج الكسري (العبارة رقم (1)) الى قيد يساوي القيمة 1.
- في ظل عدم الانعدام لكل من X و V فإن مقام القيود الممثلة في البرنامج الكسري تكلون كلها موجبة، فإذا ضربنا طرفي كل القيود بقيمة المقام لكل قيد نحصل على القيو المتبقية.

وعليه يمكن كتابة الصيغة النهائية لنموذج اقتصاديات الحجم الثابتة CRS على الشكل التالي[1]:

M

S.C

$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq 0 , j = 1,2,\ldots\ldots n$

Y

Z

$U_r , V_i \geq 0, \quad r= 1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots,s – i=1, 2,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots m.$

5-2-1 الصيغة الثنائية لنموذج CRS :

بغية تلخيص الخطوات و التقليل من الوقت اللازم للحصول على نتائج وحلول الصيغة الخطية لنموذج CRS عادة ما يتم اللجوء الى برنامج الثنائية والذي يمكن صياغة عبارته بالشكل التالي :

$Min \, Ø$

S.C

$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, x_{ij} \leq Ø \, x_{i0}$ (1) i= 1,2,……,m

$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, y_{rj} \geq y_{ro}$ (2) r= 1,2,……,s

$\lambda_j \geq 0$ (3) j= 1,2,……,n

[1] Joe zhu – wade d cook , op cite , p 03 .

يلعب البرنامج الثنائي دور جد مهم في أسلوب DEA بحيث يعوض المعامل λ كل من المعاملات u و v ، حيث يقوم بتدنية قيمة Ø تحت القيود التالية[1] :

- القيد الأول (1) يعني أن تكون القيم المرجحة لمدخلات الوحدات الأخرى أقل أو يساوي قيم مدخلات الوحدة المراد قياس كفاءتها (DMU_0) .
- القيد الثاني (2)معناه أن تكون القيم المرجحة لمخرجات الوحدات الأخرى أكبر أو يساوي قيم مخرجات الوحدة المراد قياس كفاءتها(DMU_0) .
- تعبر λ عن قيمة المعامل المضروب في المدخلات أو المخرجات للوحدات غير الكفؤة لتصبح وحدات كفؤة (%100)

3-1 الصياغة الرياضية لنموذج CRS بالتوجه المدخلي :

تم التطرق سابقا الى الصيغة الرياضية (كسرية و خطية و البرنامج الثنائي) لنموذج اقتصاديات الحجم الثابتة CRS بالتوجه المخرجي، أما صياغته بالتوجه المدخلي فهي كالآتي[2]:

النموذج الأولي:

$Min \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}$

S.C

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m}$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} = 1$$

$U_r , V_i \geq 0,$ r= 1,2,……..,s – i=1, 2,…….m.

النموذج الثنائي:

تكتب الصيغة الرياضية للنموذج الثنائي على الشكل التالي:

$Max \emptyset$

S.C

$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \ y_{rj} \geq \emptyset \ y_{ro}$ i= 1,2,……,m

$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \ x_{ij} \leq \ x_{i0}$ r= 1,2,……,s

$\lambda_j \geq 0$ j= 1,2,……..…,n

[1] H . sherman david – joe zhu , op cite , p 69-70 .

[2] W. W . Cooper and all , op cite , p 12 .

تحديد الوحدات المرجعية والقيام بالتحسين:

لا يقتصر دور أسلوب (DEA)على تحديد درجة كفاءة الوحدات المقومة بل يتعداه ليبين الخلل في المدخلات أو المخرجات للوحدات غير الكفؤة ويحدد لهذه الأخيرة الوحدات النظيرة أو المرجعية التي تكون أقرب لها من حيث الحجم لغرض بلوغ الكفاءة الكاملة.

ويقصد بالوحدة المرجعية تلك الوحدة الكفؤة التي تستخدم كمية مدخلات تساوي كمية مدخلات الوحدة غير الكفؤة ولكنها تقدم مخرجات أكثر ، أو هي تلك الوحدة التي تقدم نفس كمية مخرجات الوحدة غير الكفؤة ولكن باستخدام كمية مدخلات أقل[1].

بافتراض أن وحدة اتخاذ القرار(DMU_0) غير كفؤة، فإن الوحدات المرجعية لها E_0 تعرف بالشكل التالي[2] :

$$E_0 = \{ J / \lambda^*_J > 0 \} \qquad J = 1,2, \ldots\ldots,n$$

- أي أن الوحدات المرجعية لوحدة اتخاذ القرار (DMU_0) هي كل الوحدات التي يكون المتغير (λ) الذي يقابلها غير معدوم عند تحديد مؤشر الكفاءة لوحدة اتخاذ القرار (DMU_0).
- بعد تحديد الوحدات المرجعية للوحدة (DMU_0) يمكننا القيام بتحديد التحسينات الواجبة لهذه الوحدة حتى تصبح كفؤة.
- بعد حل البرنامج الثنائي الخاص بوحدة اتخاذ القرار (DMU_0) وإيجاد قيمة مؤشر الكفاءة الخاص بها يمكننا معرفة قيمة وكمية المدخلات الفائضة أو الزائدة (Input Excesses) وكمية المخرجات الراكدة أو الناقصة (Output Shortfalls).[3]

$$\theta^* X_0 = \sum_{j \epsilon E_0} \lambda^*_j X_j + S^{-*}$$

$$Y_0 = \sum_{j \epsilon E_0} \lambda^*_j Y_j - S^{+*}$$

حيث أن :

X_0: مدخلات وحدة اتخاذ القرار (DMU_0).

Y_0: مخرجات وحدة اتخاذ القرار (DMU_0).

S^{-*}: المدخلات الفائضة أو الزائدة (Input Excesses).

S^{+*}: المخرجات الراكدة أو الناقصة (Output Shortfalls).

[1] محمد شامل بهاء الدين مصطفى فهمي ، مرجع سبق ذكره ، ص280

[2] W .W.Cooper and all , op cite , p 12 .

[3] طلحة عبد القادر، ، مرجع سبق ذكره ، ص 55.

التحسينات الواجب ادخالها على مدخلات ومخرجات وحدةاتخاذ القرار (DMU_0) حتى تصبح وحدة كفؤة:

$\Delta X_0 = X_0 - (\theta^* X_0 - S^{-*})$

$\Delta Y_0 = S^{+*}$

وبالتالي تصبح كمية المدخلات والمخرجات بعد القيام بالتحسينات على الشكل التالي:

$\overline{X_0} = X_0 - \Delta X_0 = \theta^* X_0 - S^{-*} \leq X_0$

$\overline{Y_0} = Y_0 + \Delta Y_0 = Y_0 + S^{+*} \geq Y_0$

التحسين الذي تم التطرق اليه كان هدفه تقليل المدخلات ويدعى نموذج التوجه المدخلي أما النوع الآخر من التحسينات الذي سنتطرق اليه الآن فيدعى نموذج التوجه المخرجي حيث يهدف الى زيادة المخرجات ويمكن كتابة نموذج الثنائية الخاص به على الشكل التالي[1]:

Max η

S.C

$\sum_{j=1}^{n} \mu_j \, X_{ij} \leq x_{i0}$ i= 1,2,……,m

$\sum_{j=1}^{n} \mu_j \, y_{rj} \geq \eta \, y_{ro}$ r= 1,2,……,s

$\mu_j \geq 0$ j= 1,2,……,n

- يمكن اشتقاق الحل الأمثل لهذا النموذج مباشرة من الحل الأمثل لنموذج التوجه المدخلي وذلك على النحو التالي [2]:

$$\eta^* = \frac{1}{\theta^*} \quad , \quad \mu^* = \frac{\lambda^*}{\theta^*}$$

- حيث أن ($1<\eta$) تعني أن الوحدة غير كفؤة ويجب التوسع في المخرجات.
- المدخلات الفائضة والمخرجات الزائدة (t^- , t^+)

$X_0 = \sum_{j \epsilon E_0} \mu^*_j \, X_j + t^{-*}$

[1] طلحة عبد القادر، مرجع سبق ذكره، ص 55-56.

[2] W.W.Cooper and all , op cite , p 58 .

$$Y_{0=} = \sum_{j\epsilon E_0} \mu^*_j Y_j \quad - t^{+*}$$

- كمية المدخلات والمخرجات بعد القيام بالتحسينات:

$$\overline{X_0} = X_0 - t^{-*}$$

$$\overline{Y_0} = \eta^* Y_0 + t^{+*}$$

2- نموذج اقتصاديات الحجم المتغيرة (BCC) أو (VRS) :

2-1 مفهوم نموذج (BCC) أو (VRS)

نموذج اقتصاديات الحجم الثابتة (CRS) كما ذكرنا سابقا يكون صالحا بافتراض أن وحدات اتخاذ القرار (DMU) تعمل عند حجمها المثالي ، لكن الواقع غير ذلك حيث يلاحظ غياب المنافسة التامة، كذلك وجود القيود المالية، السياسة الحكومية ...الخ وغيرها من الأسباب تجعل من غير الممكن أن تعمل هاته الوحدات عند أحجامها المثالية.

لتغطية عيب نموذج (CRS) جاء نموذج اقتصاديات الحجم المتغيرة (VRS) الذي ينسب بدوره الى كل من (Banker, Charnes, Cooper) وقد ظهر سنة1984 أي بعد نموذج (CRS) بستة سنوات ، ويختلف نموذج (VRS) عن هذا الأخير في استناده على فرضية غلة الحجم المتغيرة (Variable Return To Scale - VRS -) أي أن العمليات التشغيلية لوحدات اتخاذ القرار يمكن أن تكون عند مستوى غلة حجم متزايدة أو ثابتة أو متناقصة.

يميز نموذج (VRS) بين نوعين من الكفاءة هما الكفاءة الفنية والكفاءة الحجمية. وعند مقارنة مؤشر الكفاءة بنموذج CRS ومؤشر الكفاءة بنموذجVRS لنفس الوحدة وبوجود اختلاف فهذا يعني بأن هذه الوحدة غير كفؤة من ناحية الحجم أما إذا تساوى المؤشرين فهذا يعني بأن الوحدة المقيمة تتميز بثبات عوائد الحجم[1] .

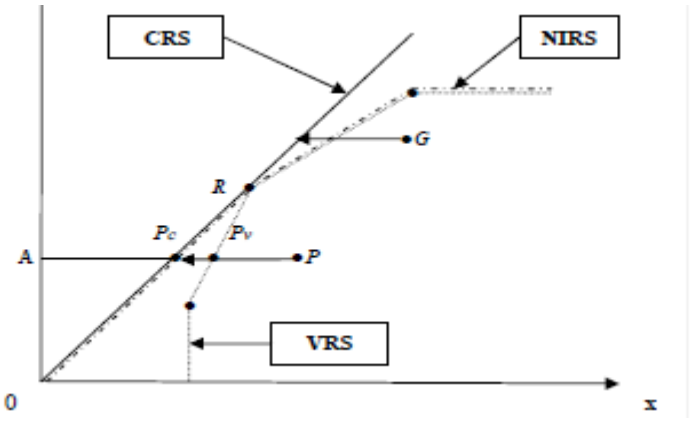
لكن أحد عيوب مؤشر الكفاءة المحسوب بنموذج VRS أنه لا يوضح ما إذا كانت الشركة تعمل في ظل عوائد الحجم المتناقصة أو المتزايدة، و لمعرفة صفة عوائد الحجم المتغيرة يطبق أسلوب DEA على نموذج ثالث هو نموذج عوائد الحجم غير المتزايدة(Non Increasing Returne To Scale -NIRS-) بتعديل علامة المساواة في معادلة قيد الحجم $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ بعلامة أصغر أو يساوي، و يتم مقارنة مؤشر الكفاءة الفنية بنموذج NIRSمع مؤشر الكفاءة الفينة بنموذجVRS ، فإذا تساوى المؤشران توصف الشركة بتناقص عوائد الحجم

[1] منصوري عبد الكريم ، **قياس الكفاءة النسبية ومحدداتها للأنظمة الصحية باستخدام تحليل مغلف البيانات للبلدان المتوسطة ة المرتفعة الدخل** ، أطروحة دكتوراه ، جامعة أبو تكر بلقايد ، تلمسان ، 2014 ، ص97

(حال الشركة G في الشكل رقم 3-4) ، و إذا إختلف المؤشران فتوصف الشركة بتزايد عوائد الحجم (حال الشركة P في الشكل رقم 3-4)[1].

والشكل الموالي رقم 3-4 يوضح الفرق بين النموذجين المذكورين:

الشكل رقم 3-3: نموذج DEA بمختلف عوائد الحجم



Source: Timothy J. Coelli and *all*, Op. Cit., p. 174.

2-2 الصياغة الرياضية لنموذج (VRS) :

إن نموذج VRS هو نفسه نموذج CRS ولكن بإضافة قيد الحجم $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ هذا القيد يجعل الوحدات المرجعية بالنسبة للوحدات غير الكفؤة من أن تكون مماثلة لها في الحجم فلا أكبر منها و لا أصغر.

2-2-1 نموذج (VRS) بالتوجه المدخلي:

$$Min\ \emptyset$$

S.C

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \ x_{ij} \leq \emptyset\ x_{i0} \qquad i= 1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots,m$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \ y_{rj} \geq y_{ro} \qquad r= 1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots,s$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \qquad j= 1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots,n$$

$$\lambda_j \geq 0$$

[1] مصطفى بابكر،**مؤشرات الأرقام القياسية**، المعهد العربي للتخطيط، مجلة جسر التنمية، رقم8 ، الكويت .، ص23 .

2-2-2 نموذج (VRS) بالتوجه المخرجي:

$Max\ \emptyset$

S.C

$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\ y_{rj} \geq \emptyset\ y_{ro}$ i= 1,2,.....,m

$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\ x_{ij} \leq\ x_{i0}$ r= 1,2,.....,s

$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ j= 1,2,.....,n

$\lambda_j \geq 0$