الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا للتجارة

مطبوعة بيداغوجية في الاحتمالات

وفق برنامج أقسام السنة الثانية تحضيري في العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير

من إعداد: د.حلفاوي بديعة
أستاذة محاضرة صنف "ب"

السنة الجامعية 2020/2019

فهرس المحتويات

المقدمة

تقدم هذه المطبوعة البيداغوجية المفاهيم الأساسية في الاحتمالات بشكل مبسط فهي تتضمن دروسا وأمثلة وتمارين محلولة وفق برنامج مقياس الاحتمالات الموجه لطلبة أقسام السنة الثانية تحضيري في المدرسة العليا للتجارة. هذه المطبوعة ليست مسحا شاملا لدرس الاحتمالات ولكنها تعتبر مكملا وتدعيما للمفاهيم الأساسية الموصى بها في مراجع مادة الاحتمالات فهي تمكن طلبة السنة أولى ماستر من متابعة دروس الإحصاء الاستدلالي الذي يوفر بدوره الأدوات اللازمة لمتابعة دروس الاقتصاد القياسي.

تحتوي هذه المطبوعة على خمسة فصول حيث يتعرض الفصلان الأول والثاني للمتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية الشهيرة على التوالي و يتطرق الفصل الثالث للمتغيرات العشوائية ذات البعدين. أما الفصل الرابع فيستهدف دراسة دوال المتغيرات العشوائية وتوزيعاتها ويكون متبوعا بالفصل الأخير الذي خصص للتصرف التقاربي. كما يتم اقتراح حلول مختصرة لسلسلة من التمارين تشمل الفصول الخمسة.

1. المتغيرات العشوائية و التوزيعات الاحتمالية

1.1. مفهوم المتغير العشوائي

مثال تمهيدي: لتكن التجربة العشوائية ξ المعرفة كما يلي: ξ ={رمي قطعة نقد متزنة مرتين} و $(S,\Im,P)$ الفضاء الاحتمالي المرفق لها بحيث $S=\{(FF),(FP),(PF),(PP)\}$ هي المجموعة الأساسية، $\Im=P(S)$ هي عشيرة على S و $P(.)$ القياس الاحتمالي.

نهتم بعدد الوجوه "F" المتحصل عليها. للتعبير كميا عن نتائج هذه التجربة نعرّف دالة ترفق لكل حدث أولي من S عدد يعبر عن عدد مرات ظهور الوجه "F". للحدث (FF) نرفق العدد 2، للحدث (PP) نرفق 0 و للحدثين (FP) و (PF) العدد 1. بهذه الطريقة نعرف التطبيق X من S نحو المجموعة $R_X=\{0,1,2\}$.

$$X:S\to\{0,1,2\}$$
$$s\mapsto X(s)=x$$

نعتبر الحوادث A_i = { الحصول على الوجه "F" i مرة}، $i\in\{0,1,2\}$.

$P(A_0)=P(PP)=P(X=0)=\frac{1}{4}$ ، $P(A_1)=P((PF)\cup(FP))=P(PF)+P(FP)=\frac{1}{2}=P(X=1)$ ، $P(A_2)=P(FF)=P(X=2)=\frac{1}{4}$

1.1.1. تعريف المتغير العشوائي

لتكن ξ تجربة عشوائية و $(S,\Im,P)$ الفضاء الاحتمالي المرفق لها. التطبيق X الذي يرفق لكل حدث أو نتيجة $(s\in S)$ العدد $X(s)$ من R يسمى متغير عشوائي على الفضاء القابل للاحتمال $(S,\Im)$ إذا تحقق ما يلي:

$$X:S\to R_X$$
$$s\mapsto X(s)=x$$

من اجل كل قيمة حقيقية $x\in R_X$ ($R_X\subseteq R$) لدينا : $X^{-1}(x)\in\Im$ أو $X^{-1}(]-\infty,x])\in\Im$.

نرمز لمجموعة قيم المتغير العشوائي X (مجموعة تعريف المتغير العشوائي X) بـ R_X .

ملاحظة 1.1. يمكننا كتابة الشرط السابق كما يلي: $\forall B_x\in B_R, X^{-1}(B_x)\in\Im$ حيث B_R تمثل العشيرة البوريلية.[1]

ملاحظة 2.1. إذا كانت المجموعة R_X منتهية أو قابلة للعد يمكننا أن اعتبار العشيرة $P(R_X)$ وفي هذه الحالة يكون X متغير عشوائي منفصل، أما إذا كانت R_X غير منتهية فنعتبر العشيرة البوريلية B_R وفي هذه الحالة يكون X متغير عشوائي مستمر.

مثال 1.1. ليكن X معرف كما يلي: $X:(S,\Im)\to(R_X,P(R_X))$ بحيث: $X(s)=\begin{cases}1 & s\in A\\ 0 & s\notin A\end{cases}$ ، $\Im=\{\phi,A,\bar{A},S\}$ ، $R_X=\{0,1\}$

X هو متغير عشوائي على $(S,\Im)$.

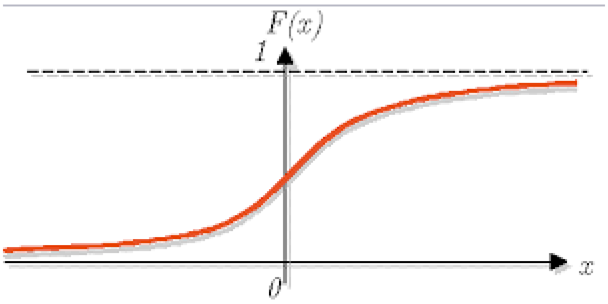
مثال 2.1. ليكن $(S,\Im,P)$ فضاء احتمالي بحيث $\Im=\{\phi,1,\{2,3,4\}\},S=\{1,2,3,4\}$ و X معرف كما يلي: $X:(S,\Im)\to(R_X,P(R_X))$: $X(1)=0\ ;\ X(2)=1\ ;\ X(3)=X(4)=2$. X ليس متغيرا عشوائيا على $(S,\Im)$.

2.1.1. تعريف دالة التوزيع التراكمي

ليكن X متغير عشوائي معرف على الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$.

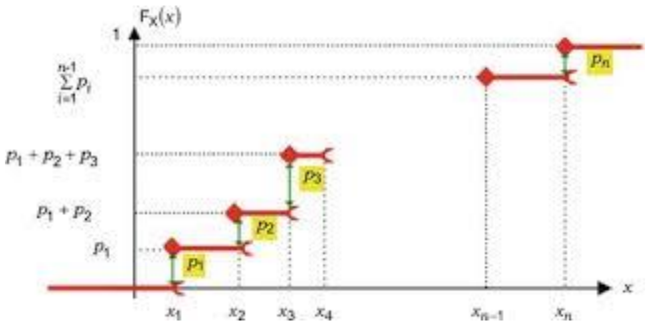
[1] العشيرة البوريلية تحتوي على المجموعات الجزئية B_x على الشكل $\forall x,\ B_x=\{s\in S / X(s)\le x\}$ أو على شكل اتحاد قابل للعد لـ B_x $\left(\underset{x}{\cup}B_x\right)$ ، أو تقاطع قابل للعد لـ B_x $\left(\cap B_x\right)$ أو متممهما.

دالة التوزيع التراكمي لـ X معرفة كما يلي: $\begin{aligned}F:R&\to[0,1]\\ x&\mapsto F(x)=P(X\le x)\end{aligned}$



نظرية 1.1. (خواص دالة التوزيع التراكمي) ليكن X متغير عشوائي و F دالة التوزيع التراكمي لدينا:

1. $0\le F(x)\le 1$
2. $F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$ و $F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$.
3. الدالة F متزايدة $(x_1<x_2 \Rightarrow F(x_1)\le F(x_2))$.
4. الدالة F مستمرة على اليمين $\left(\lim_{x\to x_0^+}F(x)=F(x_0)\right)$



.

البرهان: 1 . $0\le F(x)=P(X\le x)\le 1$

2. $\lim_{x\to-\infty}F(x)=F(-\infty)=P(X\le-\infty)=P(\Phi)=0$ لأن $\{s\in S/X(s)\le-\infty\}$ حادث مستحيل.

و $\lim_{x\to+\infty}F(x)=F(+\infty)=P(X\le+\infty)=P(S)=1$ لأن $\{s\in S/X(s)\le+\infty\}$ حادث أكيد.

3. ليكن x_1 و x_2 $(x_1<x_2)$: $\{s\in S/X(s)\le x_1\}\subseteq\{s\in S/X(s)\le x_2\}\Rightarrow P(\{s\in S/X(s)\le x_1\})\le P(\{s\in S/X(s)\le x_2\})\Rightarrow F(x_1)\le F(x_2)$

4. لتكن $(x_n)_{n\ge1}$ متتالية متزايدة بحيث $\lim_{n\to+\infty}x_n=x_0$

$\lim_{n\to+\infty}F(x_n)=\lim_{n\to+\infty}P(X\le x_n)=P(X\le \lim_{n\to+\infty}x_n)=P(X\le x_0)=F(x_0)$

ملاحظة 3.1.كل دالة معرفة على R تحقق الخواص الأربعة المذكورة أعلاه هي دالة توزيع تراكمي لمتغير عشوائي X

نظرية 2.1. ليكن X متغير عشوائي و F دالة التوزيع التراكمي فإن:

$$\forall a,b/a<b,\quad P(a<X\le b)=F(b)-F(a)$$

البرهان: يمكننا أن نكتب: $\forall a,b/\ \ a<b,\quad]-\infty,b]=]-\infty,a]\cup]a,b]\quad;\quad]-\infty,a]\cap]a,b]=\Phi$

$$P(]-\infty,b]) = P(]-\infty,a]\cup]a,b]) = P(]-\infty,a]) + P(]a,b]) = P(X \le a) - P(a < X \le b)$$
$$P(a < X \le b) = P(X \le a) - P(X \le b) = F(b) - F(a)$$

2.1. المتغير العشوائي المنفصل

1.2.1. تعريف المتغير العشوائي المنفصل

ليكن X متغير عشوائي (حقيقي) معرف على الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$، يكون المتغير العشوائي X متغيرا عشوائيا منفصلا إذا كانت مجموعة قيمه R_X مجموعة منتهية أو غير منتهية و قابلة للعد.

مثال 3.1. المتغيرات X، Y و Z متغيرات عشوائية منفصلة

ξ_1 ={رمي قطعة نقد متزنة n مرة}، X ={ عدد مرات ظهور الوجه "F" }، $R_X = \{0,1,2,....,n\}$ ، مجموعة منتهية.

ξ_2 ={رمي قطعة نرد }، Y = { النتيجة العددية لرمي قطعة نرد }. $R_Y = \{1,2,3,4,5,6\}$ ، مجموعة منتهية.

ξ_3 ={ رمي قطعة نقدية حتى الحصول على الوجه "F" للمرة الأولى }.

Z ={عدد الرميات اللازمة للحصول على الوجه "F" للمرة الأولى}. $R_Z = N^*$ ، R_Z غير منتهية و قابلة للعد.

2.2.1. التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منفصل

ليكن X متغير عشوائي منفصل معرف على الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$ و R_X مجموعة قيمه فإن **دالة التوزيع الاحتمالي** للمتغير العشوائي X معرفة كما يلي:
$$P_X(x) = \begin{cases} P(X = x) & x \in R_X \\ 0 & x \notin R_X \end{cases}$$

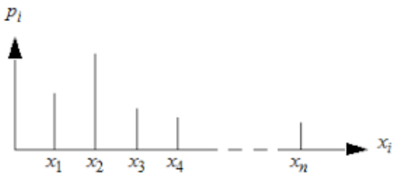
تحقق هذه الدالة الشرطين التاليين:

1. $\forall x \in R_X\ ,\quad 0 \le P(X = x) \le 1$
2. $\sum_{x \in R_X} P(X = x) = 1$

ملاحظة 4.1. $\forall A \subseteq R_X\ ,\quad P(X \in A) = \sum_{x \in A} P(X = x)$

ملاحظة 5.1. التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منفصل يعطى على شكل جدول، على شكل بيان أو على شكل صيغته الرياضية.

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_n
$P_i = P(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	p_4		p_n

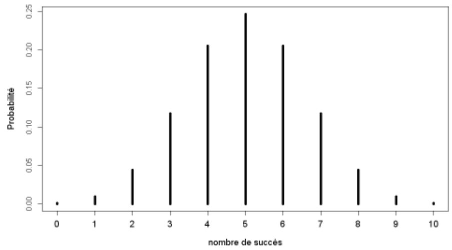


مثال 4.1. ξ ={رمي قطعة نقد 10 مرات} و X = { عدد مرات ظهور الوجه "F" }.

الصيغة الرياضية للتوزيع الاحتمالي لـ X : $\forall x \in R_X = \{0,1,2,...,10\},\quad P(X = x) = C_{10}^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير X :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = x)$	0,001	0,01	0,044	0,117	0,205	0,246	0,205	0,117	0,044	0,01	0,001



الشكل البياني للتوزيع الاحتمالي للمتغير X:

مثال 5.1. ξ = { رمي قطعة نقدية حتى الحصول على الوجه "F" للمرة الأولى }.

X = { عدد الرميات اللازمة للحصول على الوجه "F" للمرة الأولى }.

الصيغة الرياضية للتوزيع الاحتمالي للمتغير X : $\forall x \in N^*,\quad P(X=x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

3.2.1. دالة التوزيع التراكمي لمتغير عشوائي منفصل

ليكن X متغير عشوائي منفصل، دالة التوزيع التراكمي $F(x)$ معرفة كما يلي:

$$\forall x_0 \in R,\quad F(x_0)=P(X\le x_0)=\sum_{x\le x_0} P(X=x)$$

مثال 6.1. ليكن X متغير عشوائي دالة توزيعه الاحتمالي معطاة في الجدول الآتي:

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

الصيغة الرياضية لدالة التوزيع التراكمي $F(x)$ لـ X :

$$F(x)=\begin{cases} 0 & ;\ x<0 \\ 1/8 & ;\ 0\le x<1 \\ 1/2 & ;\ 1\le x<2 \\ 7/8 & ;\ 2\le x<3 \\ 1 & ;\ x\ge 3 \end{cases}$$

دالة التوزيع التراكمي $F(x)$ للمتغير X في جدول :

x	$]-\infty,0[$	$[0,1[$	$[1,2[$	$[2,3[$	$[3,+\infty[$
$F(x)$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$	1

الشكل البياني للتوزيع التراكمي $F(x)$ للمتغير X :

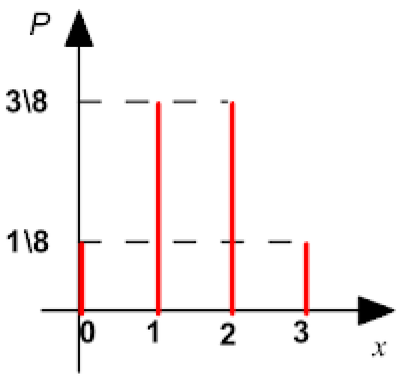
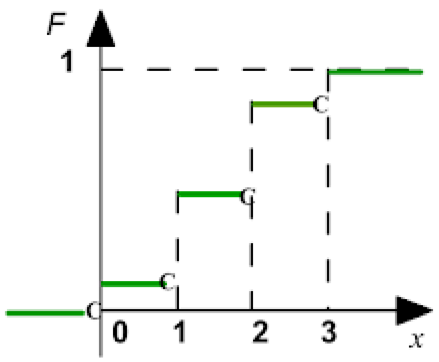


Diagramme en bâtons



Fonction de répartition

نظرية 3.1. ليكن X متغير عشوائي منفصل مجموعة قيمه $R_X=\{x_1,x_2,\dots x_{j-1},x_j x_{j+1},\dots\}$ ، $P(.)$ دالة توزيعه الاحتمالي و $F(.)$ دالة توزيعه التراكمي فإن: $\forall j,\quad P(X=x_j)=F(x_j)-F(x_{j-1})$

البرهان: $P(X=x_j)=P(x_{j-1}<X\le x_j)=F(x_j)-F(x_{j-1})$

ملاحظة 6.1. معرفة دالة التوزيع التراكمي $F(x)$ لمتغير عشوائي X تسمح بتعيين دالة التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير.

مثال 7.1. ليكن X متغير عشوائي منفصل دالة توزيعه التراكمي $F(x)$ معطاة في الجدول:

x	$]-\infty,-1[$	$[-1,0[$	$[0,1[$	$[1,+\infty[$
$F(x)$	0	$1/2$	$5/6$	1

التوزيع الاحتمالي للمتغير X في الجدول:

X	-1	0	1
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

1. المتغير العشوائي المستمر

1.3.1. تعريف المتغير العشوائي المستمر

يكون المتغير X متغيرا عشوائيا مستمرا إذا كانت مجموعة قيمه R_X مجموعة غير منتهية أي: $R_X \subseteq R$.

مثال 8.1. المتغيرات X، Y و Z متغيرات عشوائية مستمرة

X = { مدة الانتظار في محطة قطار }، $R_X = R^+$.

Y = { مدة حياة مصباح }، $R_Y = R^+$.

Z = { طول قامة أفراد مجتمع ما }، $R_Z = [0, m]$.

2.3.1. التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي مستمر

ليكن X متغير عشوائي معرف على الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$. يكون المتغير X مستمرا إذا وجدت دالة $f(.)$ مستمرة (باستثناء عند بعض النقاط) تسمى **دالة الكثافة الاحتمالية** و تحقق الشرطين الآتين:

1. $\forall x \in R \ , \ f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$

ملاحظة 7.1. ليكن X متغير عشوائي مستمر، $f(.)$ دالة كثافته الاحتمالية فإن:

$$\forall a,b \ / a<b \quad P(X \in]a,b]) = P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

يمثل الاحتمال $P(a < X \leq b)$ المساحة الموجودة تحت منحنى دالة الكثافة f و المحصورة بين العددين a و b.

ملاحظة 8.1. $\forall x \in \mathrm{R}, \quad P(X=x)=0$

ملاحظة 9.1. إذا كان X متغيرا عشوائيا مستمرا فإن: $P(a<X<b)=P(a<X\leq b)=P(a\leq X<b)=P(a\leq X\leq b)$

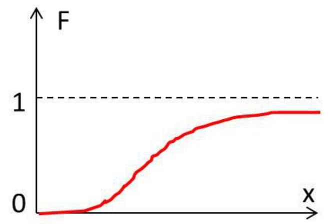
ملاحظة 10.1. إذا كان X متغيرا عشوائيا مستمرا فإن: $P(x < X \leq x+dx) = f(x)dx$

$$P(x < X \leq x+dx) = P(X \leq x+dx) - P(X \leq x) = F(x+dx) - F(x)$$

$$\underset{dx\to 0}{Lim}\left(\frac{P(x<X\leq x+dx)}{dx}\right) = \underset{dx\to 0}{Lim}\left(\frac{F(x+dx)-F(x)}{dx}\right) = F'(x) = f(x) \Rightarrow P(x<X\leq x+dx) = f(x)dx$$

3.3.1. دالة التوزيع التراكمي لمتغير عشوائي مستمر

ليكن X متغير عشوائي مستمر، دالة التوزيع التراكمي $F(.)$ معرفة كما يلي: $\forall x_0 \in R, \ F(x_0) = P(X \leq x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x$



مثال 9.1. ليكن X متغير عشوائي و $f(.)$ دالة معرفة كما يلي: $f(x)=\begin{cases}2x & x\in]0,1[\\ 0 & x\notin]0,1[\end{cases}$

1.تعيين قيمة الثابتة a لكي تكون $f(.)$ دالة كثافته احتمالية :

2. إيجاد دالة التوزيع التراكمي $F(.)$ لـ X .

$$x\le 0\,,\quad F(x)=0$$
$$x\in]0,1[\,,\quad F(x)=\int_0^x 2t\,dt=\left[t^2\right]_0^x=x^2$$
$$x>1\,,\quad F(x)=\int_0^1 2t\,dt=1$$

3. حساب الاحتمالات: $P\left(X=\frac{1}{2}\right)=0$ و $P\left(\frac{1}{3}<X<\frac{1}{2}\right)=F\left(\frac{1}{2}\right)-F\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{9-4}{36}=\frac{5}{36}$

نظرية 4.1. ليكن X متغير عشوائي مستمر، f دالة كثافته الاحتمالية و F دالة توزيعه التراكمي(على شرط أن تكون F قابلة لاشتقاق) فإن: $f(x)=F'(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}$

البرهان: $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \Rightarrow F'(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left(\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\right)\Rightarrow F'(x)=f(x)$

مثال 10.1. ليكن X متغير عشوائي دالة توزيعه التراكمي معرفة كما يلي: $F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ \sqrt{x} & x\in]0,1[\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$

إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية $f(.)$ لـ X : $f(x)=F'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{x}} & x\in]0,1[\\ 0 & x\notin]0,1[\end{cases}$

4.1. المميزات(الخصائص) العددية لمتغير عشوائي

1.4.1. التوقع الرياضي

تعريف التوقع الرياضي: ليكن X متغير عشوائي معرف على الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$. التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X هو العدد $E(X)$ بحيث:

$E(X)=\sum_{x\in R_X} x\,P(X=x)$ إذا كان X مغير عشوائي منفصل

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)dx$ إذا كان X مغير عشوائي مستمر

إذا كان φ تطبيقا من R نحو R فإن التوقع الرياضي للمتغير العشوائي $\varphi(X)$ فإن:

$E(\varphi(X))=\sum_{x\in R_X}\varphi(x)\,P(X=x)$ إذا كان X مغير عشوائي منفصل

$E(\varphi(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,f(x)dx$ إذا كان X مغير عشوائي مستمر

نظرية 5.1. (خواص التوقع الرياضي) ليكن X متغير عشوائي معرف على الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$.

1. $\forall a\in R\ ,\ E(a)=a$
2. $\forall a\in R\ ,\ E(a\,X)=a\,E(X)$
3. $\forall a\in R\ ,\ E(X+a)=E(X)+a$

البرهان: إذا كان X مغير عشوائي منفصل:

1. $\mathrm{E(a)} = a\,P(X=a) = a$
2. $E(a\,X) = \sum_{x\in R_X} ax\,P(X=x) = a \sum_{x\in R_X} x\,P(X=x) = a\,E(X)$
3. $E(X+a) = \sum_{x\in R_X} (x+a)\,P(X=x) = \sum_{x\in R_X} x\,P(X=x) + a \sum_{x\in R_X} P(X=x) = E(X)+a$

إذا كان X مغير عشوائي مستمر:

1. $\mathrm{E(a)} = \int_{-\infty}^{+\infty} a\ f(x)dx = a\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
2. $E(a\,X) = \int_{-\infty}^{+\infty} ax\ f(x)dx = a\int_{-\infty}^{+\infty} x\ f(x)dx = a\,E(X)$
3. $E(X+a) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x+a)\ f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\ f(x)dx + a\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = E(X)+a$

1.4. 2. التباين

تعريف التباين: ليكن X متغير عشوائي معرف على الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$ حيث $\mathrm{E}(X)$ عدد منته. تباين المتغير العشوائي هو التوقع الرياضي للمتغير العشوائي $(X-E(X))^2$.

$$V(X) = E\left((X-E(X))^2\right) = \sum_{x\in R_X}(x-E(X))^2\,P(X=x)$$ إذا كان X مغير عشوائي منفصل

$$V(X) = E\left((X-E(X))^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-E(X)\right)^2\ f(x)dx$$ إذا كان X مغير عشوائي مستمر

$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$ يسمى بالانحراف المعياري للمتغير العشوائي X.

نظرية 6.1. ليكن X متغير عشوائي معرف على الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$ حيث $\mathrm{E}(X)$ عدد منته فإن:

$$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2$$

البرهان: $V(X) = E\left((X-E(X))^2\right) = E\left(X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2\right) = E\left(X^2\right) - 2(E(X))^2 + (E(X))^2 = E\left(X^2\right) - (E(X))^2$

نظرية 7.1. (خواص التباين) ليكن X متغير عشوائي على الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$ و $\mathrm{E}(X)$ عدد منته.

1. $\forall a\in R\ ,\ \mathrm{V}(a)=0$
2. $\forall a\in R\ ,\ \mathrm{V}(a\,X) = a^2\,\mathrm{V}(X)$
3. $\forall a\in R\ ,\ \mathrm{V}(X+a) = V(X)$

البرهان: 1. $\mathrm{V}(a) = E\left(a^2\right) - (E(a))^2 = a^2 - a^2 = 0$

2. $\mathrm{V}(a\,X) = E\left((aX)^2\right) - (E(aX))^2 = a^2E\left(X^2\right) - a^2(E(X))^2 = a^2\left(E\left(X^2\right) - (E(X))^2\right) = a^2\,\mathrm{V}(X)$

3. $\mathrm{V}(X+a) = E\left((a+X)^2\right) - (E(a+X))^2 = a^2 + 2aE(X) + E\left(X^2\right) - a^2 - 2aE(X) - E\left(X^2\right) = V(X)\ )$

مثال 11.1. ليكن X متغير عشوائي منفصل دالة توزيعه معطاة في الجدول الآتي:

إيجاد $\mathrm{E}(X)$ ، $\mathrm{E}(2X-1)$ ، $\mathrm{V}(X)$ ، $\mathrm{V}(2X-1)$.

$\mathrm{E}(X) = \sum_{x\in R_X} x\,P(X=x) = 2$ و $\mathrm{E}(2X-1) = 2\,\mathrm{E(X)}\ -1 = 3$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{x\in R_X} x^2\,P(X=x) - 4 = 5-4 = 1$

$V(2X-1) = 4V(X) = 4$

x	0	1	2	3	Σ
$P(X=x)$	$1/10$	$2/10$	$3/10$	$4/10$	1
$x\,P(X=x)$	0	$2/10$	$6/10$	$12/10$	$20/10$
$x^2\,P(X=x)$	0	$2/10$	$12/10$	$36/10$	$50/10$

مثال 12.1. ليكن X متغير عشوائي و $f(.)$ دالة معرفة كما يلي: $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{12} & x\in[1,5]\\ 0 & x\notin[1,5]\end{cases}$

إيجاد $E(X)$ ، $E(3X+2)$ ، $V(X)$ ، $V(2-X)$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f(x)dx=\int_1^5\frac{x^2}{12}dx=\left[\frac{x^3}{36}\right]_1^5=\frac{31}{9} \quad و \quad E(3X+2)=3E(X)+2=\frac{111}{9}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\,f(x)dx=\int_1^5\frac{x^3}{12}dx=\left[\frac{x^4}{48}\right]_1^5=13 \quad و \quad V(2-3X)=9V(X)=9\left(E(X^2)-(E(X))^2\right)=\frac{92}{9}$$

ملاحظة 11.1. ليكن X متغير عشوائي توقعه الرياضي $E(X)$ وتباينه $V(X)=\sigma_X^2$ فإن: $Z=\frac{X-E(X)}{\sigma_X}$ يسمى متغير عشوائي معياري، توقعه الرياضي 0 و وتباينه 1.

3.4.1. العزوم

تعريف: ليكن X متغير عشوائي معرف على الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$. العزم من الرتبة k $(k\in N^*)$ للمتغير العشوائي X بالنسبة للعدد الثابت a هو العدد الحقيقي (إذا وجد) $E\left((X-a)^k\right)$.

إذا كان $a=0$ ، يسمى $E(X^k)$ **العزم غير المتمركز** من الرتبة k للمتغير العشوائي X ونكتب:

$$m_k(X)=m_k=E(X^k)$$

$$m_k=\sum_{x\in R_X}x^k\,P(X=x) \qquad \text{إذا كان } X \text{ مغير عشوائي منفصل}$$

$$m_k=\int_{-\infty}^{+\infty}x^k\,f(x)dx \qquad \text{إذا كان } X \text{ مغير عشوائي مستمر}$$

ملاحظة 12.1. $m_1=E(X)$

إذا كان $a=E(X)$ ، يسمى $E\left((X-E(X))^k\right)$ **العزم المتمركز** من الرتبة k للمتغير العشوائي X ونكتب:

$$\mu_k(X)=\mu_k=E\left((X-E(X))^k\right)$$

$$\mu_k=\sum_{x\in R_X}(x-E(X))^k\,P(X=x) \qquad \text{إذا كان } X \text{ مغير عشوائي منفصل}$$

$$\mu_k=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^k\,f(x)dx \qquad \text{إذا كان } X \text{ مغير عشوائي مستمر}$$

ملاحظة 13.1. $\mu_1=0$ ، $\mu_2=m_2-m_1^2$ ، $\mu_3=m_3-3m_1m_2+2m_1^3$ و $\mu_4=m_4-4m_1m_3+6m_1^2m_2-3m_1^4$.

العزم العاملي من الرتبة k للمتغير العشوائي X هو العدد الحقيقي (إذا وجد):

$$\mu_{[k]}(X)=\mu_{[k]}=E\left((X(X-1)(X-2)\ldots.(X-k+1)\right)$$

ملاحظة 14.1. $\mu_{[1]}=m_1=E(X)$ و $\mu_{[2]}=m_2-m_1$

مثال 13.1. ليكن X المتغير العشوائي المعرف في مثال11.1. احسب m_3 ، μ_3 و $\mu_{[3]}$.

$$m_3=\sum_{x\in R_X}x^3\,P(X=x)=0^3.\frac{1}{10}+1^3.\frac{2}{10}+2^3.\frac{3}{10}+3^3.\frac{4}{10}=\frac{2+24+108}{10}=\frac{134}{10}$$

$$\mu_3=\sum_{x\in R_X}(x-2)^3\,P(X=x)=(0-2)^3.\frac{1}{10}+(1-2)^3.\frac{2}{10}+(2-2)^3.\frac{3}{10}+(3-2)^3.\frac{4}{10}=\frac{-8-2+4}{10}=\frac{-2}{5}$$

$$\mu_{[3]}=E\left(X(X-1)(X-2)\right)=E\left(X^3-3X^2+2X\right)=E(X^3)-3E(X^2)+2E(X)=\frac{134}{10}-15+4=\frac{134-110}{10}=\frac{24}{10}$$

4.4.1. الدالة المولدة للعزوم

تعريف: ليكن X متغير عشوائي معرف على الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$. الدالة المولدة للعزوم للمتغير X هي التوقع الرياضي للمتغير العشوائي e^{tX} ونرمز لها بـ $M_X(t)$ حيث $t\in R$: $M_X(t)=E(e^{tX})$

$$M_X(t)=\sum_{x\in R_X} e^{tx}\,P(X=x)$$ إذا كان X مغير عشوائي منفصل

$$M_X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\,f(x)dx$$ إذا كان X مغير عشوائي مستمر

نظرية 8.1. ليكن X متغير عشوائي معرف على الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$. المشتقة من الرتبة k للدالة المولدة للعزوم للمتغير X مأخوذة في النقطة $t=0$ تساوي العزم من الرتبة k للمتغير العشوائي X .

$$\left.\frac{d^{(k)}M_X(t)}{dt^k}\right|_{t=0}=M_X^{(k)}(0)=E(X^k)=m_k$$

البرهان: بما أن: $\left(e^x=\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...\right)$

$$M_X(t)=E(e^{tX})=E\left(1+tX+\frac{t^2X^2}{2!}+\frac{t^3X^3}{3!}+...+\frac{t^nX^n}{n!}+...\right)\quad M_X(t)=1+tE(X)+\frac{t^2}{2!}E(X^2)+\frac{t^3}{3!}E(X^3)+...+\frac{t^n}{n!}E(X^n)+...$$

$$M'_X(t)=E(X)+tE(X^2)+\frac{t^2}{2}E(X^3)+...+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}E(X^n)+...\Rightarrow M'_X(0)=E(X)$$

$$M''_X(t)=E(X^2)+tE(X^3)+...+\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}E(X^n)+...\Rightarrow M''_X(0)=E(X^2)$$ وبالتالي : $\left.\frac{d^{(k)}M_X(t)}{dt^k}\right|_{t=0}=M_X^{(k)}(0)=E(X^k)=m_k$

ملاحظة 15.1. نستنتج من النظرية 8.1 أن: $V(X)=M''(0)-(M'(0))^2$

مثال 14.1. ليكن X متغير عشوائي منفصل دالة توزيعه الاحتمالي معطاة كما يلي:

$$\forall x\in\{0,1\},\ P(X=x)=P^x(1-p)^{1-x}\ ;\ 0<p<1$$

إيجاد الدالة المولدة للعزوم $M_X(t)$ للمتغير X ثم استنتج $E(X)$ و $V(X)$.

$$M_X(t)=\sum_{x\in R_X} e^{tx}\,P(X=x)=e^0(1-p)+e^t(p)=(1-p)+pe^t\ ,\ \forall t \quad ، \quad M'_X(t)=pe^t \text{ و } M''_X(t)=pe^t$$

$$E(X)=M'_X(0)=p\ ;\ E(X^2)=M''_X(0)=p\ ;\ V(X)=M''(0)-(M'(0))^2=p-p^2=p(1-p)$$

مثال 15.1. ليكن X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية: $f(x)=\begin{cases}e^{1-x} & x\geq 1\\ 0 & x<1\end{cases}$

إيجاد الدالة المولدة للعزوم $M_X(t)$ للمتغير X ثم استنتج $E(X)$ و $V(X)$.

$$M_X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\,f(x)dx=\int_1^{+\infty} e^{tx}e^{1-x}dx=\int_1^{+\infty} e^{tx-x+1}\,dx=e\left[\frac{e^{(t-1)x}}{t-1}\right]_1^{+\infty}=\frac{e^t}{1-t};\ t<1$$

$$M'_X(t)=\frac{(2-t)e^t}{(1-t)^2},\ t<1\quad ;\quad M''_X(t)=\frac{(5-4t+t^2)e^t}{(1-t)^3},\ t<1$$

$$E(X)=M'_X(0)=2\ ;\ E(X^2)=M''_X(0)=5\ ;\ V(X)=M''(0)-(M'(0))^2=5-4=1$$

5.4.1. خصائص أخرى للمتغير العشوائي: الوسيط، الربيعيات، المنوال.

- الوسيط لمتغير عشوائي

- الوسيط لمتغير عشوائي منفصل X هو القيمة M_e (M_e ليس بالضرورة وحيدة) التي تحقق ما يلي:

$$P(X<M_e)\leq\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad P(X\leq M_e)\geq\frac{1}{2}$$

- الوسيط لمتغير عشوائي مستمر X هو القيمة M_e التي تحقق ما يلي: $F(M_e)=\frac{1}{2}$ (F دالة التوزيع التراكمي).

- الربيعيات، العُشيرات و الجزيئات من الرتبة α .

-الجزء من الرتبة α لمتغير عشوائي منفصل X هو القيمة x_α (x_α ليس بالضرورة وحيد) التي تحقق :

$$P(X < x_\alpha) \le \alpha \quad \text{و} \quad P(X \le x_\alpha) \ge \alpha$$

-الجزء من الرتبة α لمتغير عشوائي مستمر X هوالقيمة x_α التي تحقق: $F(x_\alpha)=\alpha$ (F دالة التوزيع التراكمي).

- الربيعيات Q_1 ، Q_2 ، Q_3 هي على التوالي الجزيئات من الرتب $\alpha=\frac{1}{4}$ ، $\alpha=\frac{1}{2}$ ، $\alpha=\frac{3}{4}$.

ملاحظة 16.1. الربيع الثاني هو الوسيط و العشيرات x_α هي الجزيئات من الرتب $\alpha=\frac{1}{10}$ ، $\alpha=\frac{2}{10}$ ،.... $\alpha=\frac{9}{10}$
.

- المنوال لمتغير عشوائي

- المنوال لمتغير عشوائي منفصل X هو القيمة M_0 التي يقابلها أكبر احتمال.

$$M_0 \text{ منوال } \Leftrightarrow \quad \forall x \in R_X, P(X=x) \le P(X=M_0)$$

- المنوال لمتغير عشوائي مستمر X هي القيمة M_0 التي تعظم دالة الكثافة الاحتمالية.

$$M_0 \text{ منوال } \Leftrightarrow \quad f(M_0)=\max_x f(x)$$

مثال 16.1. ليكن المتغير العشوائي X المعرف في المثال 11.1 عين الربيعيات Q_1 ، Q_2 ، Q_3 و المنوال M_0 .

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$
$F(x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	1

$$P(X<1)=0{,}1<0{,}25 \ \wedge\ P(X\le 1)=0{,}3\ge 0{,}25 \Rightarrow Q_1=1$$

$$P(X<2)=0{,}3<0{,}5 \ \wedge\ P(X\le 2)=0{,}6\ge 0{,}5 \Rightarrow M_e=Q_2=2$$

$$P(X<3)=0{,}6<0{,}75 \ \wedge\ P(X\le 3)=1\ge 0{,}75 \Rightarrow Q_3=3$$

$$\forall x\in R_X,\ P(X=3)=\frac{4}{10}>P(X=x) \Rightarrow M_o=3$$

مثال 17.1. ليكن المتغير العشوائي X المعرف في المثال 12.1 عين الربيعيات Q_1 ، Q_2 ، Q_3 و المنوال M_0 .

دالة التوزيع التراكمي $F(x)$ لـ X .

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\begin{cases}0 & x<1\\ \int_1^x \frac{t}{12}\,dt=\left[\frac{t^2}{24}\right]_1^x=\frac{x^2-1}{24} & x\in[1,5]\\ 1 & x>5\end{cases}$$

$$F(Q_1)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow \frac{Q_1^2-1}{24}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow Q_1^2=7\Leftrightarrow Q_1=\sqrt{7}$$

$$F(M_e)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \frac{M_e^2-1}{24}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow M_e^2=13\Leftrightarrow M_e=\sqrt{13}$$

$$F(Q_3)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow \frac{Q_3^2-1}{24}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow Q_3^2=19\Leftrightarrow Q_3=\sqrt{19}$$

$$\left(\forall x\in[1,5]\ ,\ f'(x)=\frac{1}{12}>0\right) \Leftarrow f \text{ متزايدة على المجال } [1,5] \Leftarrow M_0=5$$

6.4.1. نظرية Tchebytchev

ليكن X متغير عشوائي توقعه الرياضي $\mu=E(X)$ و تباينه $\sigma^2=V(X)$ لدينا: $\forall \varepsilon>0,\ P(|X-\mu|>\varepsilon)\le \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

أو بصيغة أخرى: $\forall \varepsilon>0,\ P(|X-\mu|\le \varepsilon)>1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

البرهان: $\forall \varepsilon > 0,\ P(|X-\mu| > \varepsilon) = \int_{\{x,|x-\mu|>\varepsilon\}} f(x)dx < \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx < \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\varepsilon^2} f(x)dx = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx = \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$

مثال 18.1. ليكن X متغير عشوائي توقعه الرياضي $\mu = 1$ و تباينه $\sigma^2 = \frac{1}{9}$.

إيجاد احتمال أن يكون X محصور بين القيمتين $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{2}$. $P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right) = P\left(|X-1| < \frac{1}{2}\right)$

حسب نظرية Tchebytchev لدينا: $P\left(|X-1| < \frac{1}{2}\right) > 1 - \frac{\sigma^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \Leftrightarrow P\left(|X-1| < \frac{1}{2}\right) > 1 - \frac{\frac{1}{9}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right) \in \left[\frac{5}{9}, 1\right]$

2. التوزيعات الاحتمالية الشهيرة

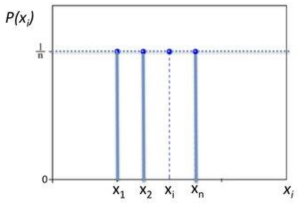
1.2. التوزيعات الاحتمالية المنفصلة الشهيرة

1.1.2. التوزيع المنتظم المنفصل

ليكن X متغير عشوائي منفصل يأخذ n قيم مختلفة بنفس الاحتمال، نقول أن X يتبع التوزيع المنتظم المنفصل.

إذا كان: $\forall x_i \in R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\},\ P(X = x_i) = \frac{1}{|R_X|} = \frac{1}{n}$

إذا كان $R_X = \{1,2,..,n\}$ لدينا: $\forall x \in R_X,\ P(X = x) = \frac{1}{n}$ و نكتب $X \sim U(n)$.



نظرية 1.2. ليكن $X \sim U(n)$ لدينا: $E(X) = \frac{n+1}{2}$ و $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

البرهان: $E(X) = \sum_{x=1}^{n} x\, P(X = x) = \frac{1}{n}\sum_{x=1}^{n} x = \frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{x=1}^{n} x^2\, P(X = x) - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{4n^2+4n+2n+2-3n^2-6n-3}{12} = \frac{n^2-1}{12}$$

نظرية 2.2. ليكن $X \sim U(n)$ فإن دالة التوزيع التراكمي لـ X هي: $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{x}{n} & 1 \le x \le n \\ 1 & x > n \end{cases}$

البرهان: إذا كان $x < 1$ $\quad F(x) = 0$

إذا كان $1 \le x \le n$ $\quad F(x) = \sum_{t=1}^{x} P(X = t) = \frac{1}{n}\sum_{x=1}^{x} 1 = \frac{x}{n}$

إذا كان $x > n$ $\quad F(x) = \sum_{t=1}^{n} P(X = t) = 1$

نظرية 3.2. ليكن $X \sim U(n)$ فإن الدالة المولدة للعزوم $M_X(t)$ لـ X هي: $M_X(t) = \frac{e^t}{n}\left(\frac{1-e^{nt}}{1-e^t}\right)$, $t \ne 0$

البرهان: $M_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=1}^{n} e^{tx}\, P(X = x) = \frac{1}{n}\sum_{x=1}^{n}(e^t)^x = \frac{e^t}{n}\left(\frac{1-e^{nt}}{1-e^t}\right)$; $t \ne 0$

مثال 1.2. ليكن X متغير عشوائي بحيث: $\forall x \in R_X = \{1,2,3,4,5,6\}, P(X=x)=\frac{1}{6}$

1.طبيعة و معالم توزيع X ثم استنتاج $E(X)$ و $V(X)$: $X \sim \mathrm{U}(6)$ لدينا: $E(X)=\frac{6+1}{2}=\frac{7}{2}$ و $V(X)=\frac{6^2-1}{12}=\frac{35}{12}$.

2.دالة التوزيع التراكمي $\mathrm{F}(x)$ لـ X : $F(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \frac{x}{6} & 1\le x\le 6\\ 1 & x>6\end{cases}$

3.تعيين الربيعيات $Q_1=2$ ، $Q_2=3$ ، $Q_3=5$ و المنوال M_0 لا يوجد.

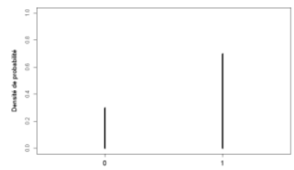
مثال 2.2. ليكن X متغير عشوائي منفصل يأخذ القيم 25,20,15,10,5 بنفس الاحتمال. لإيجاد $E(X)$ و $V(X)$ نعتبر المتغير العشوائي $Y=\frac{X}{5}$ بحيث $Y \sim \mathrm{U}(5)$. $E(Y)=\frac{5+1}{2}=3$ و $V(Y)=\frac{5^2-1}{12}=2$ ومنه $E(X)=5E(Y)=15$ و $V(X)=5^2V(Y)=50$.

2.1.2. توزيع بارنولي

لتكن ξ تجربة عشوائية و $S=\{s,e\}$ المجموعة الأساسية المرفقة لها حيث s يمثل النجاح و e الفشل. تسمى ξ بتجربة بارنولي. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يأخذ القيمة 1 إذا وقع النجاح (s) و القيمة 0 عند العكس.

$$X(x)=\begin{cases}1 & x=s\\ 0 & x=e\end{cases}$$

نقول أن المتغير العشوائي المنفصل X يتبع توزيع بارنولي بالمعلمة p حيث p هو احتمال أن يتحقق النجاح (s) ونكتب $X \sim \mathrm{B(p)}$ إذا كانت دالة توزيعه الاحتمالي كما يلي: $\begin{cases}P(X=1)=\mathrm{p}\\ P(X=0)=1-\mathrm{p}\end{cases}$



ملاحظة 1.2. يمكننا كتابة دالة التوزيع الاحتمالي لـ X كما يلي: $\forall x \in R_X=\{0,1\},\quad P(X=x)=p^x(1-p)^{1-x}$

نظرية 4.2. ليكن $X \sim \mathrm{B(p)}$ لدينا: $E(X)=p$ و $V(X)=p(1-p)$.

البرهان:

$$E(X)=\sum_{x\in R_X} x\,P(X=x)=0.P(X=0)+1.P(X=1)=0.(1-p)+1.p=p$$

$$E(X^2)=\sum_{x\in R_X} x^2\,P(X=x)=0^2.P(X=0)+1^2.P(X=1)=0.(1-p)+1.p=p$$

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=p-p^2=p(1-p)$$

نظرية 5.2. ليكن $X \sim \mathrm{B(p)}$ فإن الدالة المولدة للعزوم $M_X(t)$ لـ X هي: $M_X(t)=(1-\mathrm{p})+p\,\mathrm{e}^{\mathrm{t}},\ \mathrm{t}\in\mathrm{R}$

البرهان: $M_X(t)=\sum_{x\in R_X} e^{tx}\,P(X=x)=e^{t0}.P(X=0)+e^{t1}.P(X=1)=1.(1-p)+e^t.p=q+p.e^t$

مثال 3.2. لتكن التجربة العشوائية $\xi=$ {رمي قطعة نرد متزنة}. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يأخذ القيمة 1 إذا ظهر عدد زوجي والقيمة 0 إذا ظهر عدد فردي.

1.إعطاء طبيعة و معالم توزيع X ثم استنتاج $E(X)$ و $V(X)$.

$X \sim \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ ، $E(X)=\frac{1}{2}$ و $V(X)=\frac{1}{4}$.

2. تعيين الدالة المولدة للعزوم $M_X(t)$ لـ X ثم استنتاج $E(X)$ و $V(X)$.

$$M_X(t)=\frac{1}{2}\left(1+e^{,t}\right)\ ,M'_X(t)=\frac{1}{2}\left(1+e^{,t}\right)=\frac{1}{2}e^{,t}\quad ,\quad M''_X(t)=\frac{1}{2}e^{,t}$$

$$E(X)=M'_X(0)=\frac{1}{2}\ ;\ E(X^2)=M''_X(0)=\frac{1}{2}\quad ;\quad V(X)=M''(0)-(M'(0))^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

3.1.2. توزيع ذو الحدين

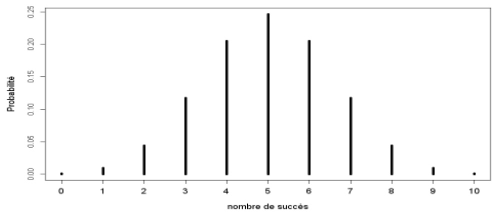
نكرر تجربة بارنولي n مرة بطريقة مستقلة $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. لكل تجربة ξ_i نرفق المتغير العشوائي X_i حيث:

$$X_i(x)=\begin{cases}1 & x=s\\ 0 & x=e\end{cases}\quad ;\quad \forall i\in\{1,2..,n\}\quad \text{و}\quad \begin{cases}P(X_i=1)=\text{p}\\ P(X_i=0)=1-\text{p}\end{cases}.$$

نعتبر المتغير العشوائي X المعرف كما يلي: $X=$ {عدد مرات ظهور النجاح (s) خلال n محاولات بارنولي}.

$$\text{P}(X=x)=C_n^x(\text{P}(s))^x(\text{P}(e))^{n-x}=C_n^x\left(P(X_i=1)\right)^x\left(P(X_i=0)\right)^{n-x}=C_n^x\ p^x(1-p)^{n-x}\ ,x\in\{0,1,2,\ldots,n\}$$

نقول أن المتغير العشوائي X يتبع التوزيع ذو الحدين بالمعلمتين n و p ونكتب: $X\sim \text{B}(n,p)$ إذا كانت دالة توزيعه الاحتمالي كما يلي: $\forall x\in R_X=\{0,1,2,\ldots,n\},\quad \text{P}(X=x)=C_n^x\ p^x(1-p)^{n-x}$



ملاحظة 1.2. يمكننا أن نكتب: $X=\sum_{x=1}^{n}X_i$ بحيث $X_i\sim \text{B(p)}\quad ;\quad \forall i=1,2,\ldots.,n$

ملاحظة 2.2. يمكننا أن نتحقق أن $\sum_{x\in R_X}\text{P}(X=x)=1$ باستعمال العلاقة $(a+\text{b})^{\text{n}}=\sum_{x=0}^{x=n}C_n^x\ \text{a}^x b^{n-x}$.

نظرية 6.2. ليكن $X\sim \text{B}(n,\text{p})$ فإن الدالة المولدة للعزوم $M_X(t)$ لـ X هي: $M_X(t)=\left((1-\text{p})+p\,\text{e}^{\text{t}}\right)^{\text{n}},\ \text{t}\in \text{R}$

البرهان: $M_X(t)=\sum_{x\in R_X}e^{t\,x}P(X=x)=\sum_{x=0}^{n}C_n^x(pe^t)^x(1-p)^{n-x}=\left((1-\text{p})+p\,\text{e}^{\text{t}}\right)^{\text{n}}$

نظرية 7.2. ليكن $X\sim \text{B}(n,\text{p})$ لدينا: $E(X)=np$ و $V(X)=np(1-p)$.

البرهان: $M'_X(t)=n\,p\,e^t\left((1-\text{p})+p\,\text{e}^{\text{t}}\right)^{\text{n-1}}$ و $M''_X(t)=n\,p\,e^t\left((1-\text{p})+p\,\text{e}^{\text{t}}\right)^{\text{n-1}}+n(n-1)\ p^2\,e^{2t}\left((1-\text{p})+p\,\text{e}^{\text{t}}\right)^{\text{n-2}}$

$$E(X)=M'_X(0)=np$$

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=M''_X(0)-(M'_X(0))^2=n\,p+n\,(\text{n}-1)\,p^2-n^2p^2=np+np^2=n\,p\,(1-p)$$

مثال 4.2. نفترض أن احتمال الحصول على شهادة الماستر بالمدرسة العليا للتجارة لطالب مسجل بالمدرسة اختير عشوائيا هو 0,9 .نأخذ عشوائيا مجموعة مكونة من 5 طلبة مسجلين في السنة الأولى ونعتبر المتغير العشوائي X المعرف كما يلي:

$X=$ {عدد الطلبة المتحصلين على شهادة الماستر بالمدرسة العليا للتجارة}

$$X\sim \text{B}(5\ ;\ 0{,}9)\qquad \forall x\in R_X=\{0,1,2,3,4,5\}\ ;\ \ \text{P}(X=x)=C_5^x\ (0{,}9)^x(0{,}1)^{5-x}$$

1. احتمال أن لا يتحصل أي طالب على الشهادة. $\text{P}(X=0)=C_5^0\ (\text{O},9)^0(1-0{,}9)^5=(0{,}1)^5=0{,}00001$
2. احتمال أن يتحصل على الأقل طالب على الشهادة. $\text{P}(X\geq 1)=1-\text{P}(X<1)=1-\text{P}(X=0)=1-(0{,}1)^5=0{,}99999$
3. احتمال أن يكون عدد الطلبة المتحصلين على الشهادة أكبر من عدد الطلبة الغير المتحصلين على الشهادة. $\text{P}(X\geq 3)=1-\text{P}(X<3)=1-\text{P}(X=0)-\text{P}(X=1)-\text{P}(X=2)=1-(0{,}1)^5-5(0{,}9)^1(0{,}1)^4-10(0{,}9)^2(0{,}1)^3=0{,}99145$
4. العدد المتوسط للطلبة المتحصلين على الشهادة لدفعة تتكون من 200 طالب. $\text{E(X)}=n\,p=200\times 0{,}9=180$

4.1.2. التوزيع الهندسي

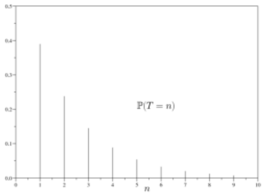
نكرر تجربة بارنولي بطريقة مستقلة حتى الحصول على أول نجاح (s) (أي التجارب $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n, \ldots$ مستقلة).

نعتبر المتغير العشوائي X المعرف كما يلي: X ={عدد المحاولات اللازمة للحصول على أول نجاح (s) }.

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)=(\mathrm{P(e)})^{x-1}(\mathrm{P(s)}) \quad ; \quad x \in \{1,2,\ldots,+\infty\}$$

نقول أن المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الهندسي بالمعلمة p و نكتب: $X \sim \mathrm{G}(p)$ إذا كانت دالة توزيعه الاحتمالي كما يلي:

$$\forall x \in R_X = \{1,2,\ldots,+\infty\} = N^*, \quad \mathrm{P}(\mathrm{X}=x) = p\,(1\text{-}\mathrm{p})^{x-1} = p\,\mathrm{q}^{x-1}$$



نظرية 8.2. ليكن $X \sim \mathrm{G(p)}$ فإن الدالة المولدة للعزوم $M_X(t)$ لـ X هي: $M_X(t)=\dfrac{p\,\mathrm{e}^{\mathrm{t}}}{1\text{-}\mathrm{q}\,\mathrm{e}^{\mathrm{t}}}, \left|\mathrm{q}\,\mathrm{e}^{\mathrm{t}}\right|<1$

البرهان: $M_X(t)=E(e^{tX})=\sum\limits_{x \in R_X} e^{tx} P(X=x)=\sum\limits_{x=1}^{+\infty} e^{tx}\, p\,\mathrm{q}^{x-1}=p\,e^t \sum\limits_{x=0}^{+\infty}\left(q\,e^t\right)^x=\dfrac{p\,e^t}{1-qe^t} \quad ,\left|\mathrm{q}\,\mathrm{e}^{\mathrm{t}}\right|<1$

نظرية 9.2. ليكن $X \sim \mathrm{G(p)}$ لدينا: $E(X)=\dfrac{1}{p}$ و $V(X)=\dfrac{q}{p^2}$.

البرهان: $M'_X(t)=\dfrac{p\,\mathrm{e}^{\mathrm{t}}\left(1\text{-}\mathrm{q}\,\mathrm{e}^{\mathrm{t}}\right)+p\,q\,\mathrm{e}^{2\mathrm{t}}}{\left(1\text{-}\mathrm{q}\,\mathrm{e}^{\mathrm{t}}\right)^2}=\dfrac{p\,\mathrm{e}^{\mathrm{t}}}{\left(1\text{-}\mathrm{q}\,\mathrm{e}^{\mathrm{t}}\right)^2}$ و $M''_X(t)=\dfrac{p\,\mathrm{e}^{\mathrm{t}}\left(1\text{-}\mathrm{q}\,\mathrm{e}^{\mathrm{t}}\right)^2+2\,p\,q\,\mathrm{e}^{2\mathrm{t}}\left(1\text{-}\mathrm{q}\,\mathrm{e}^{\mathrm{t}}\right)}{\left(1\text{-}\mathrm{q}\,\mathrm{e}^{\mathrm{t}}\right)^4}=\dfrac{p\,\mathrm{e}^{\mathrm{t}}+pq\,\mathrm{e}^{2\mathrm{t}}}{\left(1\text{-}\mathrm{q}\,\mathrm{e}^{\mathrm{t}}\right)^3}$

$E(X)=M'_X(0)=\dfrac{p}{(1-q)^2}=\dfrac{1}{p}$ و $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=M''_X(0)-(M'_X(0))^2=\dfrac{p+pq}{(1-q)^3}-\dfrac{1}{p^2}=\dfrac{p+pq-p}{p^3}=\dfrac{q}{p^2}$

مثال 5.2. لتكن التجربة العشوائية ξ = {رمي قطعة نرد متزنة }.

نعتبر المتغير العشوائي: X = {عدد المحاولات اللازمة لظهور الوجه "1" للمرة الأولى}.

1. طبيعة و معالم توزيع X ثم استنتاج $E(X)$ و $V(X)$: $X \sim \mathrm{G}\left(\dfrac{1}{6}\right)$ ، $E(X)=6$ و $V(X)=30$

2. احتمال ظهور الوجه "1" في الرمية العاشرة: $P(X=10)=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^9=\dfrac{5^9}{6^{10}}=0{,}0323$

5.1.2. التوزيع فوق الهندسي

يحتوي مجتمع على N عنصر، N_p يتميز بالخاصية A و N_q بالخاصية $\bar{A}$ حيث p تمثل نسبة عناصر A في المجتمع و $q=1-p$ نسبة عناصر $\bar{A}$ في المجتمع. نسحب عشوائيا و بدون إعادة n عنصر من هذا المجتمع.

نعتبر المتغير العشوائي X ={عدد العناصر التي تتميز بالخاصية A في العينة المسحوبة }.

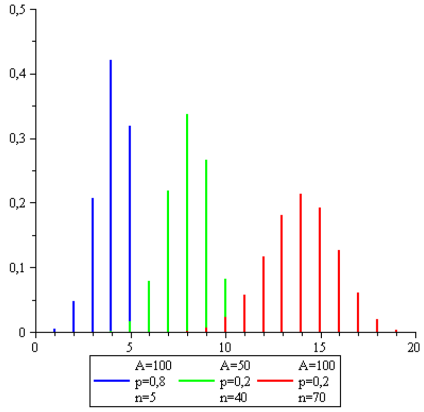
$\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)$ هو عدد الحالات الموافقة الذي يتمثل في اختيار x عنصر من بين N_p و الباقي $n-x$ من بين N_q على عدد الحالات الممكنة أي عدد العينات بحجم n من مجتمع حجمه N.

$$x \le N_p \;\wedge\; x \le n \;\Rightarrow\; x \le \min(n, N_p)$$

$$\mathrm{n}\text{-}x \le \mathrm{N}\text{-}N_p \;\wedge\; \mathrm{n}\text{-}x \le \mathrm{n} \;\Rightarrow\; x \ge n-(\mathrm{N}\text{-}N_p) \le x \;\wedge\; x \ge 0 \;\Rightarrow\; x \ge \max(0, \mathrm{n}\text{-}N_q)$$

نقول أن المتغير العشوائي X يتبع التوزيع فوق الهندسي بالمعالم N ، N_p ، n و نكتب: $X \sim \mathrm{H}(\mathrm{N}, n, \mathrm{N_p})$ إذا كانت دالة توزيعه الاحتمالي كما يلي:

$$\forall x \in R_X = \{x \in \mathrm{N} / \max(0, \mathrm{n} - N_q) \le x \le \min(n, N_p)\} \quad ; \quad \mathrm{P}(\mathrm{X} = x) = \frac{C_{N_p}^{x}\, C_{N-N_p}^{n-x}}{C_N^n}$$



نظرية 10.2. ليكن $X \sim \mathrm{H}(\mathrm{N}, n, \mathrm{N_p})$ لدينا: $E(X^k) = n\frac{N_p}{N}E(Y+1)^{k-1}$ حيث $Y \sim \mathrm{H}(\mathrm{N}-1, n-1, \mathrm{N_p})$.

البرهان: $E(X^k) = \sum_{x \in R_X} x^k P(X = x) = \sum_{x=0}^{n} x^k \frac{C_{N_p}^{x}\, C_{N-N_p}^{n-x}}{C_N^n} = \sum_{x=1}^{n} x^k \frac{\frac{\mathrm{N_p}}{x} C_{N_p-1}^{x-1}\, C_{N-N_p}^{n-x}}{\frac{N}{n} C_{N-1}^{n-1}}$

$$E(X^k) = \frac{n N_p}{N} \sum_{x=1}^{n} x^{k-1} \frac{C_{N_p-1}^{x-1}\, C_{N-N_p}^{n-x}}{C_{N-1}^{n-1}} = \frac{n N_p}{N} \sum_{y=0}^{n} (y+1)^{k-1} \frac{C_{N_p-1}^{y}\, C_{N-N_p}^{n-(y+1)}}{C_{N-1}^{n-1}}$$

$$E(X^k) = \frac{n N_p}{N} \sum_{y=0}^{n} (y+1)^{k-1} \frac{C_{N_p-1}^{y}\, C_{N-N_p}^{(n-1)-y}}{C_{N-1}^{n-1}} = \frac{n N_p}{N} E\left((Y+1)^k\right) \;;\; Y \sim \mathrm{H}(\mathrm{N}-1, n-1, \mathrm{p}) \;;\; \mathrm{p} = \frac{N_p - 1}{N-1}$$

نظرية 11.2. ليكن $X \sim \mathrm{H}(\mathrm{N}, n, \mathrm{p})$ لدينا: $E(X) = n.\frac{N_p}{N}$ و $V(X) = n\frac{\mathrm{N}-\mathrm{n}}{\mathrm{N}-1}.\frac{N_p}{N}.\frac{\mathrm{N}-N_p}{N}$.

البرهان: حسب النظرية 10.2 لدينا: $E(X) = n\frac{N_p}{N}$

و $E(X^2) = n\frac{N_p}{N}E(Y+1) = n\frac{N_p}{N}[E(Y)+1] = n\frac{N_p}{N}\left[\frac{(n-1)(N_p-1)}{N-1}+1\right] \;;\; Y \sim \mathrm{H}(\mathrm{N}-1, n-1, \mathrm{p})$

$$V(X) = n\frac{N_p}{N}\left[\frac{(n-1)(N_p-1)}{N-1}+1\right] - n^2.\frac{N_p^2}{N^2} = n\frac{N_p}{N}\left[\frac{N(N-n)-N_p(N-n)}{N(N-1)}\right] = n\frac{N_p}{N}\left[\frac{(N-n)(N-N_p)}{N(N-1)}\right] = \frac{N-n}{N-1}\, n\frac{N_p}{N}\frac{N-N_p}{N}$$

مثال 6.2. في مؤسسة صغيرة يعمل 5 عمال و 6 عاملات. يريد مدير المؤسسة أخذ رأي المستخدمين، فقام باستجواب 7 أشخاص.ليكن المتغير العشوائي: X = {عدد العاملات المستجوبات}.

1.توزيع X ثم استنتاج $E(X)$ و $V(X)$. $X \sim \mathrm{H}(11, 7, 6)$

$$\forall x \in R_X = \{x \in \mathrm{N} / \max(0, 7-5) \le x \le \min(7,6)\} = \{x \in \mathrm{N} / 2 \le x \le 6\} \;;\; \mathrm{P}(\mathrm{X} = x) = \frac{C_6^x C_5^{7-x}}{C_{11}^7}$$

$$V(X) = n\frac{\mathrm{N}-\mathrm{n}}{\mathrm{N}-1}.\frac{N_p}{N}.\frac{\mathrm{N}-N_p}{N} = 7\frac{4}{10}.\frac{6}{11}.\frac{5}{11} = 0{,}69 \quad \text{و} \quad E(X) = n\,\mathrm{p} = \frac{42}{11} = 3{,}81$$

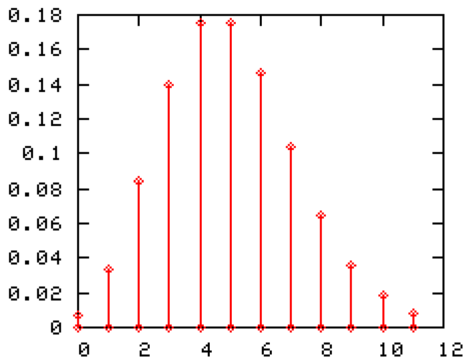
2. احتمال أن يستجوب المدير 6 عاملات : $P(X=6) = \frac{C_6^6 C_5^1}{C_{11}^7} = \frac{5 \times 7! \times 4!}{11!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{11 \times 10 \times 9 \times 8} = \frac{120}{7920} = 0{,}015$

3. احتمال أن يستجوب المدير عامل واحد على الأقل: $P(X \le 6) = 1$ أو $P(X \ge 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(\Phi) = 1$

6.1.2. توزيع بواسون

لتكن ξ تجربة عشوائية و A حادث بحيث $\mathrm{P}(A) = \mathrm{p}$ ، p صغير جدا $(\mathrm{p} \to 0)$. نكرر هاته التجربة n مرة بطريقة مستقلة، n كبير بما فيه الكفاية $(\mathrm{n} \to +\infty)$. وليكن X متغير عشوائي معرف كما يلي: X = {عدد مرات وقوع الحادث A خلال فترة زمنية}، حيث $\lambda = np$ هو ثابت يعبر عن العدد المتوسط لعدد مرات وقوع الحادث A

خلال هاته الفترة الزمنية.نقول أن المتغير العشوائي X يتبع توزيع بواسون بالمعلمة λ و نكتب: $X \sim P(\lambda)$ إذا كانت دالة توزيعه الاحتمالي كما يلي: $\forall x \in R_X = N,\quad P(X=x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$



نظرية 12.2. ليكن $X \sim P(\lambda)$ فإن الدالة المولدة للعزوم $M_X(t)$ لـ X هي: $M_X(t)=e^{\lambda(e^t-1)},\ t\in R$

البرهان: $M_X(t)=E(e^{tX}) = \sum_{x\in R_X} e^{tx}P(X=x) = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{+\infty}\frac{(\lambda e^t)^x}{x!} = e^{\lambda(e^t-1)},\quad t\in R$

نظرية 13.2. ليكن $X\sim P(\lambda)$ لدينا: $E(X)=V(X)=\lambda$.

البرهان: $M'_X(t)=\lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}$ و $M''_X(t) = \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)} + \lambda e^t \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)} = \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}\left(1+\lambda e^t\right)$

$E(X)=M'_X(0)=\lambda$ و $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2 = M''_X(0)-(M'_X(0))^2=\lambda(1+\lambda)-\lambda^2=\lambda$

مثال 7.2. لوحظ في مؤسسة لبناء السكنات أن عدد حوادث العمل الشهرية يتبع توزيع بواسون بالمعلمة $1/12$. نعتبر المتغير العشوائي: X = { عدد حوادث العمل خلال شهر }. $X \sim P(1/12)$

1. العدد المتوسط لحوادث العمل خلال شهر: $E(X)=V(X)=1/12$

2. احتمال أن لا يقع أي حادث عمل خلال شهر: $P(X=0)=e^{-1/12}$

مثال 8.2. نفترض أن عدد البواخر التي تصل إلى ميناء وهران يوميا يتبع توزيع بواسون بالمعلمة $\lambda=2$.

1.نعتبر المتغير العشوائي: X = { عدد البواخر التي تصل إلى ميناء وهران خلال يوم}، $X\sim P(2)$.

احتمال أن تتقدم إلى مدخل الميناء على الأقل باخرة خلال يوم: $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-e^{-2}$

2. نعتبر المتغير العشوائي: Y = { عدد البواخر التي تصل إلى ميناء وهران خلال أسبوع }، $Y\sim P(14)$.

احتمال أن تتقدم إلى مدخل الميناء على الأكثر باخرة خلال أسبوع: $P(Y\leq 1)=P(Y=0)+P(Y=1)=15e^{-14}$

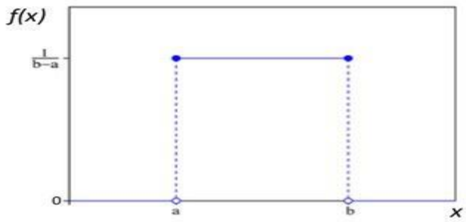
3.التوقع الرياضي و التباين لعدد البواخر التي تصل إلى الميناء خلال أسبوع: $E(X)=V(X)=14$

2.2. التوزيعات الاحتمالية المستمرة الشهيرة

1.2.2. التوزيع المنتظم المستمر

نقول أن المتغير العشوائي المستمر X يتبع التوزيع المنتظم المستمر على المجال $[a,b]$ و نكتب $X\sim U([a,b])$

إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية كما يلي: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & x\in[a,b]\\ 0 & x\notin[a,b]\end{cases}$



ملاحظة 3.2. يمكننا كتابة دالة الكثافة لــ X كما يلي: $f(x)=\frac{1}{b-a}I_{[a,b]}(x)$ حيث $I_{[a,b]}(x)$ هي الدالة المؤشرة.

نظرية 14.2.ليكن $X \sim U([a,b])$ فإن دالة التوزيع التراكمي لـ X هي:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ 1 & x>b\end{cases}$$

البرهان: إذا كان $x<a$ $F(x)=0$ ، إذا كان $x>b$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt=\int_{a}^{b}\frac{1}{b-a}\,dt=\left.\frac{t}{b-a}\right]_{a}^{b}=1$$

و إذا كان $a\le x\le b$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt=\int_{a}^{x}\frac{1}{b-a}\,dt=\left.\frac{t}{b-a}\right]_{a}^{x}=\frac{x-a}{b-a}$$

نظرية 15.2. ليكن $X \sim U([a,b])$ لدينا: $E(X)=\frac{a+b}{2}$ و $V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$.

البرهان :

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f(x)\,dx=\int_{a}^{b}\frac{x}{b-a}\,dt=\left.\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_{a}^{b}=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}$$

$$V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\,f(x)\,dx-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{b^2-2ab+a^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}$$

ملاحظة 4.2. ليكن $X \sim U([a,b])$فإن العزم غير المتمركز من الرتبة k للمتغير X هو العدد الحقيقي

$$m_k=\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{(k+1)(b-a)},k\in N^*$$

نظرية 16.2.ليكن $X \sim U([a,b])$فإن الدالة المولدة للعزوم $M_X(t)$ لـ X هي:

$$M_X(t)=\begin{cases}\frac{e^{tb}-e^{tb}}{t(b-a)} & ,t\neq 0\\ 1 & ,t=0\end{cases}$$

البرهان :

$$M_X(t)=E(e^{tx})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}\,f(x)\,dx=\int_{a}^{b}\frac{e^{tx}}{b-a}\,dt=\left.\frac{e^{tx}}{t(b-a)}\right]_{a}^{b}=\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}\quad ;t\neq 0$$

مثال 9.2. نفترض أن مدة انتظار قطار في محطة هو متغير عشوائي X يتبع توزيع منتظم مستمر على المجال $[0,8]$.

1.التوقع الرياضي و التباين لمدة انتظار قطار في محطة : $E(X)=4$ ، $V(X)=\frac{16}{3}$. $\left(X\sim U([0,8])\right)$

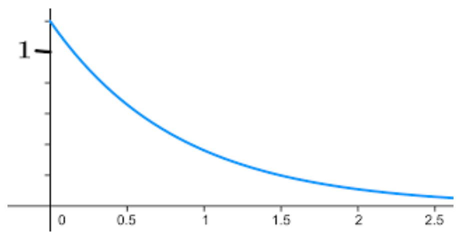
2. احتمال أن لا تفوق مدة انتظار قطار في محطة 5 دقائق: $P(X<5)=F(5)=\frac{5}{8}$

3. احتمال أن تفوق مدة انتظار قطار في محطة 10 دقائق: $P(X>10)=1-F(10)=1-1=0$

2.2.2. التوزيع الآسي

نقول أن المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الآسي بالمعلمة α $(\alpha>0)$ ونكتب $X\sim\xi(\alpha)$ إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\alpha\, e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$



ملاحظة 5.2. يمكننا كتابة دالة الكثافة الاحتمالية لــ X كما يلي: $f(x)=\alpha e^{-\alpha x}I_{]0,+\infty[}(x)$.

نظرية 17.2. ليكن $X\sim\xi(\alpha)$ فإن دالة التوزيع التراكمي لـ X هي: $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

البرهان: إذا كان $x\le 0$ $F(x)=0$

إذا كان $x>0$ $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{0}^{x}\alpha e^{-\alpha t}\,dt=\left.-e^{-\alpha t}\right]_0^x=-e^{-\alpha x}+1$

نظرية 18.2. ليكن $X\sim\xi(\alpha)$ فإن الدالة المولدة للعزوم $M_X(t)$ لـ X هي: $M_X(t)=\dfrac{\alpha}{\alpha-t}\ ,t<\alpha$

البرهان: $M_X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}f(x)\,dx=\int_{0}^{+\infty}e^{tx}\alpha e^{-\alpha x}\,dx=\int_{0}^{+\infty}\alpha\, e^{x(t-\alpha)}\,dx=\left.\dfrac{\alpha\, e^{x(t-\alpha)}}{(t-\alpha)}\right]_0^{+\infty}=\dfrac{\alpha}{(\alpha-t)}\ ;\ t<\alpha$

ملاحظة 6.2. ليكن $X\sim\xi(\alpha)$ لدينا: $\forall\ t>0,h>0\ ;P(X>t+h/X>t)=P(X>h)$. يقال أن المتغير X ليس له ذاكرة "بدون ذاكرة".

نظرية 19.2. ليكن $X\sim\xi(\alpha)$ لدينا: $E(X)=\dfrac{1}{\alpha}$ و $V(X)=\dfrac{1}{\alpha^2}$.

البرهان: $M'_X(t)=\dfrac{\alpha}{(\alpha-t)^2}$ و $M''_X(t)=\dfrac{2\alpha}{(\alpha-t)^3}=$

$E(X)=M'_X(0)=\dfrac{1}{\alpha}$ و $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=M''_X(0)-(M'_X(0))^2=\dfrac{2}{\alpha^2}-\dfrac{1}{\alpha^2}=\dfrac{1}{\alpha^2}$

ملاحظة 7.2. ليكن $X\sim\xi(\alpha)$ لدينا: $\mathrm{E(X)}=\sqrt{V(X)}=\dfrac{1}{\alpha}$

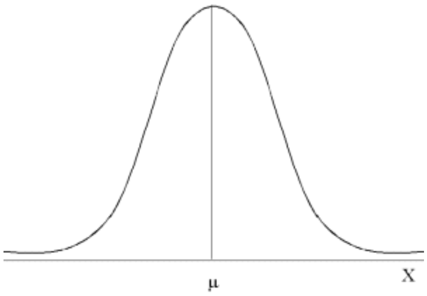
مثال 10.2. نفترض أن مدة حياة (بالأيام) نبات يعيش في بيئة معينة تتبع توزيع الآسي بالمعلمة $\frac{1}{100}$.

ليكن المتغير العشوائي X المعرف كما يلي: X = مدة حياة نبات يعيش في بيئة معينة ، $X\sim\xi\left(\frac{1}{100}\right)$.

1. التوقع الرياضي و التباين لمدة حياة هذا النبات : $E(X)=100$ ، $V(X)=10000$
2. احتمال أن يموت هذا النبات بعد 50 يوم: $P(X>50)=1-F(50)=\dfrac{1}{\sqrt{e}}=0{,}606$

3.2.2. التوزيع الطبيعي

نقول أن المتغير العشوائي المستمر X يتبع التوزيع الطبيعي بالمعلمتين μ و σ ونكتب $X\sim N(\mu,\sigma)$ إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية كما يلي: $\mu\in\mathrm{R},\sigma>0$, $\forall x\in R,\ f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$



ملاحظة 8.2. يمكننا التحقق أن f فعلا دالة كثافة احتمالية باستعمال النتيجة التالية: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$

نضع: $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\Rightarrow dy=\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}dx$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-y^2}\,\sigma\sqrt{2}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}\,\mathrm{d}x=1$$

ملاحظة 9.2.

- دالة الكثافة f متناظرة حول μ ($f(\mu-x)=f(\mu+x)$).
- دالة الكثافة f لها نقطتا انعطاف تبعدا عن $x=\mu$ بـ σ ($f''(\mu-x)=f''(\mu+x)=0$).

$$f'(x)=\frac{-1}{\sigma^2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}=0\Rightarrow x=\mu$$

$$f''(x)=\frac{-1}{\sigma^2\sqrt{2\pi}}\left[\left(\frac{1}{\sigma}\right)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}-(x-\mu)^2\frac{1}{\sigma^3}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\right]=\frac{-1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\left[1-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

$$f''(x)=0\Rightarrow 1-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2=0\Rightarrow (x-\mu)^2=\sigma^2\Rightarrow (x=\mu+\sigma)\vee(x=\mu-\sigma)\quad ;\quad f(\mu+\sigma)=f(\mu-\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}}$$

- الوسيط $\mu=M_e$ لأن لدينا $F(\mu)=P(X\le\mu)=P(X>\mu)=\frac{1}{2}$.

$$F(\mu)=P(X\le\mu)=\int_{-\infty}^{\mu}f(x)\,dx=-\int_{+\infty}^{0}f(\mu-y)\,dy=\int_{0}^{+\infty}f(\mu-y)\,dy=\int_{0}^{+\infty}f(\mu+y)\,dy=\int_{\mu}^{+\infty}f(x)\,dx=P(X>\mu)$$

- المنوال $\mu=M_0$ لأن لدينا: $f'(x)=0\Rightarrow x=\mu\ \wedge\ f''(\mu)=\frac{-1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}<0\Rightarrow f(\mu)=\max_x f(x)$

نظرية 20.2. ليكن $X\sim N(\mu,\sigma)$ فإن الدالة المولدة للعزوم $M_X(t)$ لـ X هي: $\forall t\in R,\ M_X(t)=e^{t\mu+\frac{1}{2}t^2\sigma^2}$

البرهان: $M_X(t)=E(e^{tx})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx$

$$M_X(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left((x-\mu)^2-2\sigma^2tx\right)}dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(x-(\mu+t\sigma^2)\right)^2-2\mu t\sigma^2-t^2\sigma^4\right]}dx=\frac{e^{\frac{2\mu t\sigma^2+t^2\sigma^4}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x-(\mu+t\sigma^2)\right)^2}dx$$

$$M_X(t)=\frac{e^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x-(\mu+t\sigma^2)\right)^2}dx=\frac{e^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma e^{-\frac{1}{2}z^2}dz=e^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

نظرية 21.2. ليكن $X\sim N(\mu,\sigma)$ لدينا: $E(X)=\mu$ و $V(X)=\sigma^2$.

البرهان: $M'_X(t)=\left(\mu+t\sigma^2\right)e^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}}$ و $M''_X(t)=\left(\sigma^2+\left(\mu+t\sigma^2\right)^2\right)e^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}}$

$E(X)=M'_X(0)=\mu$ و $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=M''_X(0)-(M'_X(0))^2=\sigma^2+\mu^2-\mu^2=\sigma^2$

ملاحظة 10.2. ليكن X متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي $X\sim N(\mu,\sigma)$ فإن المتغير العشوائي $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ يتبع التوزيع الطبيعي المعياري $Z\sim N(0,1)$ ودالة كثافته الاحتمالية تكون كما يلي:[2] $\forall z\in R,\ f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}$

نظرية 22.2. ليكن $Z\sim N(0,1)$ ، دالة التوزيع التراكمي لـ Z تعطى كما يلي: $\Phi(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$

البرهان: لدينا: $\Phi(-z)=1-\Phi(z)$

$$\Phi(-z)=P(Z\le -z)=\int_{-\infty}^{-z}f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{-z}f(-t)\,dt=-\int_{+\infty}^{z}f(u)\,du=\int_{z}^{+\infty}f(u)\,du=P(Z>z)=1-P(Z\le z)=1-\Phi(z)$$

بما أن التحصل على الصيغة الرياضية للتكامل $\Phi(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$ غير ممكن تحليليا، يتم تقيم هذا التكامل باستعمال طرق عددية تقديرية. لهذا الغرض أعد جدولا خاصا، يسمى جدول التوزيع الطبيعي المعياري، يلم على قيم $\Phi(z)$ التقريبية ($z>0$). بالنسبة لقيم z السالبة نستنتج قيم $\Phi(z)$ بناءا على تناظر التوزيع الطبيعي المعياري بالنسبة لـ 0 ، لدينا $\Phi(-z)=1-\Phi(z)$.

ملاحظة 11.2. يتم حساب الاحتمالات $P(X\in I_X)$ حيث $X\sim N(\mu,\sigma)$ باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري بعد تحويل X إلى متغير توزيعه طبيعي معياري $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$.

مثلا: $P(X\in]a,b])=P(a<X\le b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}<Z\le\frac{b-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

مثال 11.2. نهتم بقامة (بالسنتيمتر) الأفراد الذين يتراوح عمرهم بين 18 و 65 عام في بلد ما.

يمثل المتغيران X_1 و X_2 قامة النساء و قامة الرجال الذين يتراوح عمرهم ما بين 18 و 65 عام على التوالي. نفترض أن X_1 متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي توقعه $\mu_1=165\,cm$ و تباينه $\sigma_1^2=(6\,cm)^2$ و X_2 متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي توقعه $\mu_2=175\,cm$ و تباينه $\sigma_2^2=(11\,cm)^2$.

1. احتمال أن يكون ل طول قامة امرأة أختيرت عشوائيا محصور بين $1{,}53\,m$ و $1{,}77\,m$

$X_1=$ قامة النساء الذين يتراوح عمرهم ما بين 18 و 65 عام. $X_1\sim N(165,6)$

$$P(153\le X_1\le 177)=P\left(\frac{153-165}{6}\le\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\le\frac{177-165}{6}\right)=P(-2\le Z\le 2)=\Phi(2)-\Phi(-2)$$

$\Phi(2)-\Phi(-2)=2\Phi(2)-1=2\,(0{,}97725)-1=0{,}954$ حيث: $Z\sim N(0,1)$

2. احتمال أن يكون طول قامة رجل أختير عشوائيا يفوق $1{,}70\,m$

$X_2=$ قامة الرجال الذين يتراوح عمرهم ما بين 18 و 65 عام. $X_2\sim N(175,11)$

$$P(X_2>170)=P\left(\frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2}>\frac{170-175}{11}\right)=P\left(Z>\frac{170-175}{11}\right)=P(Z>-0{,}45)=P(Z\le 0{,}45)=\Phi(0{,}45)=0{,}674$$

3. نختار عشوائيا شخص عمره يتراوح ما بين 18 و 65 عام وقامته تفوق $1{,}70\,m$ من هذا البلد. علمًا أن نسبة النساء الذين يتراوح عمرهم ما بين 18 و 65 عام هي $52\,\%$ ، نحسب احتمال أن يكون هذا الشخص امرأة
نعتبر الحوادث الآتية: $F=$ الشخص المختار امرأة، $A=$ الشخص قامته تفوق $1{,}70\,m$

$$P(A)=P(A\cap F)+P(A\cap\overline{F})=P(A/F)P(F)+P(A/\overline{F})P(\overline{F})=P(X_1>170)\,(0{,}52)+P(X_2>170)\,(0{,}48)$$

[2] دالة الكثافة f متناظرة بالنسبة للمحور $\mu=0$ لدينا: $f(-z)=f(z)$

$$P(X_1>170)=P\left(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}>\frac{170-165}{6}\right)=P(Z>0{,}83)=1-P(Z\le 0{,}83)=1-\Phi(0{,}83)=1-0{,}79673=0{,}203$$

$$P(A)=P(X_1>170)\,(0{,}52)+P(X_2>170)\,(0{,}48)=(0{,}203)\,(0{,}52)+(0{,}674)(0{,}48)=0{,}429$$

$$P(F/A)=\frac{P(A/F)\,P(F)}{P(A)}=\frac{P(X_1>170)\,(0{,}52))}{P(A)}=\frac{(0{,}20)\,(0{,}52)}{0{,}429}=\frac{0{,}106)}{0{,}429}=0{,}246$$

$$P(X>50)=1-F(50)=\frac{1}{\sqrt{e}}=0{,}606$$

4.2.2. توزيع Gamma

تعريف الدالة Gamma

الدالة Gamma التي نرمز لها بـالحرف Γ معرفة كما يلي: $\forall r>0,\ \Gamma(r)=\int_0^{+\infty} x^{r-1}e^{-x}dx$

خصائص الدالة Gamma

1. $\forall r>0,\ \Gamma(r+1)=r\,\Gamma(r)$

نستعمل التكامل بالتجزئة ، $\forall r>0,\ \Gamma(r+1)=\int_0^{+\infty} x^r e^{-x}dx=\left[-x^r e^{-x}\right]_0^{+\infty}+r\int_0^{+\infty} x^{r-1}e^{-x}dx=r\,\Gamma(r)$

2. $\forall r\in N^*,\ \Gamma(r)=(r-1)!$

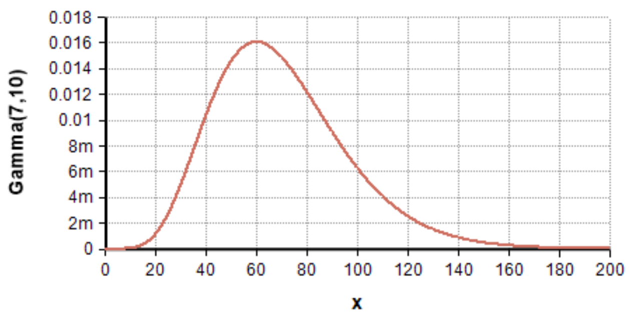
$$\forall n\in N^*,\ \Gamma(r)=(r-1)\,\Gamma(r-1)=(r-1)\,(r-2)\Gamma(r-2)=(r-1)(r-2)...(r-(r-1)\,\Gamma(1)=(r-1)!$$

3. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

نضع: $x=\frac{u^2}{2}$ و لدينا: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{2}}{u}e^{-\frac{u^2}{2}}u\,du=\sqrt{2}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\frac{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}}{2}=\sqrt{\pi}$

تعريف توزيع Gamma: نقول أن المتغير العشوائي المستمر X يتبع Gamma بالمعلمتين $r>0$ و $\alpha>0$ و نكتب $X\sim\gamma(r,\alpha)$ إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$



ملاحظة 12.2. f دالة كثافة احتمالية .

نضع $x=\frac{y}{\alpha}$ ، لدينا: $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{\alpha^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\alpha x}\,dx=\frac{\alpha^r}{\Gamma(r)}\int_0^{+\infty}\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{r-1}e^{-y}\,\frac{1}{\alpha}dy=\frac{\alpha^r}{\alpha^r\,\Gamma(r)}\int_0^{+\infty}y^{r-1}e^{-y}\,dy=1$

ملاحظة 13.2.ليكن $X\sim\gamma(r,\alpha)$

إذا كان $r=1$ فإن $X\sim\gamma(1,\alpha)$ أي X يتبع التوزيع الآسي بالمعلمة α ($X\sim\xi(\alpha)$).

إذا كان $r=\frac{1}{2}$ و $\alpha=\frac{n}{2}, n\in N^*$ لدينا $X\sim\gamma\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)$. نقول أن X يتبع توزيع $Khi-deux$ بدرجة حرية n و نكتب $X\sim\chi^2_{(n)}$.

نظرية 23.2. ليكن $X\sim\gamma(r,\alpha)$ فإن الدالة المولدة للعزوم $M_X(t)$ لـ X هي: $\forall t<\alpha,\ M_X(t)=\left(\frac{\alpha}{\alpha-t}\right)^r$

البرهان: $M_X(t)=E(e^{tx})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}f(x)\,dx=\int_0^{+\infty}e^{tx}\frac{\alpha^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\alpha x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\alpha^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{(t-\alpha)x}dx$

نضع : $y=(\alpha-t)x$ ، $t-\alpha>0$; $M_X(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\alpha^r}{\Gamma(r)}\left(\frac{y}{\alpha-t}\right)^{r-1}e^{-y}\frac{1}{\alpha-t}dy=\left(\frac{\alpha}{\alpha-t}\right)^r\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^{+\infty}y^{r-1}e^{-y}dy=\left(\frac{\alpha}{\alpha-t}\right)^r$

نظرية 24.2. ليكن $X\sim\gamma(r,\alpha)$ لدينا: $E(X)=\frac{r}{\alpha}$ و $V(X)=\frac{r}{\alpha^2}$.

البرهان: $M'_X(t)=r\,\alpha^r\left(\frac{1}{\alpha-t}\right)^{r+1}$ و $M''_X(t)=r(r+1)\alpha^r\left(\frac{1}{\alpha-t}\right)^{r+2}$

$E(X)=M'_X(0)=r\,\alpha^r\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{r+1}=\frac{r}{\alpha}$ و $V(X)=M''_X(0)-(M'_X(0))^2=r(r+1)\alpha^r\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{r+2}+\left(\frac{r}{\alpha}\right)^2=\frac{r(r+1)+r^2}{\alpha^2}=\frac{r}{\alpha^2}$

مثال 12.2. ليكن X متغير دالة توزيعه التراكمي $F(.)$ معطاة كما يلي: $F(x)=\begin{cases}1-(1+x)e^{-x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

1. إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية لـ X : $f(x)=F'(x)=\begin{cases}x\,e^{-x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

2.حساب الاحتمال الآتي: $P(X>1)=1-P(X\le1)=1-F(1)=1-(1+1)e^{-1}=1-2e^{-1}=0{,}264$.

3. طبيعة و معالم توزيع X ثم استنتاج $E(X)$ و $V(X)$: $X\sim\gamma(2,1)$ ، $E(X)=2$ و $V(X)=2$.

ملخص للتوزيعات الشهيرة المنفصلة و المستمرة

الدالة المولدة للعزوم	التباين	التوقع الرياضي	دالة التوزيع أو دالة الكثافة	مجموعة قيم	المعالم	التوزيع X
$M_X(t)=\frac{e^t}{n}\left(\frac{1-e^{nt}}{1-e^t}\right), t\ne0$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\frac{n+1}{2}$	$P(X=x)=\frac{1}{n}$	$\{1,2,..,n\}$	$n\in N^*$	$X\sim U(n)$
$M_X(t)=(1-p)+p\,e^t,\ t\in R$	$p(1-p)$	p	$P(X=x)=p^x(1-p)^{1-x}$	$\{0,1\}$	$p\in[0,1]$	$X\sim B(p)$
$M_X(t)=\left((1-p)+p\,e^t\right)^n, t\in R$	$np(1-p)$	np	$P(X=x)=C_n^x\,p^x(1-p)^{n-x}$	$\{0,1,..,n\}$	$n\in N^*,\ p\in[0,1]$	$X\sim B(n,p)$
$M_X(t)=\frac{p\,e^t}{1-q\,e^t}, \lvert q\,e^t\rvert<1$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{1}{n}$	$P(X=x)=p(1-p)^{x-1}$	N^*	$p\in[0,1]$	$X\sim G(p)$
-	$n.\frac{N-n}{N-1}.p.(1-p)$	$n.p$	$P(X=x)=\frac{C_{N_p}^x\,C_{N-N_p}^{n-x}}{C_N^n}$	$[\max(0,n-N_q),$ $\min(n,N)]$	$n,N\in N^*, n<N$ $p=\frac{N_p}{N}\in[0,1]$	$X\sim H(N,n,p)$
$M_X(t)=e^{\lambda(e^t-1)}, t\in R$	λ	λ	$P(X=x)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$	N	$\lambda\in R_+^*$	$X\sim P(\lambda)$
$M_X(t)=\begin{cases}\frac{e^{tb}-e^{tb}}{t(b-a)} & ,t\ne0\\ 1 & ,t=0\end{cases}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{a+b}{2}$	$f(x)=\frac{1}{b-a}$	$[a,b]$	$a,b\in R, a<b$	$X\sim U([a,b])$

$M_X(t)=\dfrac{\alpha}{\alpha-t}, t<\alpha$	$\dfrac{1}{\alpha^2}$	$\dfrac{1}{\alpha}$	$f(x)=\alpha\, e^{-\alpha x}$	R_+^*	$\alpha>0$	$X \sim \xi(\alpha)$
$M_X(t)=e^{t\mu+\frac{1}{2}t^2\sigma^2}, t\in R$	σ^2	μ	$f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	R	$\mu\in \mathrm{R}, \sigma>0$	$X\sim N(\mu,\sigma)$
$M_X(t)=\left(\dfrac{\alpha}{\alpha-t}\right)^r, t<\alpha$	$\dfrac{r}{\alpha^2}$	$\dfrac{r}{\alpha}$	$f(x)=\dfrac{\alpha^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\alpha x}$	R_+^*	$r>0, \alpha>0$	$X\sim \gamma(r,\alpha)$

3. المتغير العشوائي ذو البعدين

1.3. مفهوم المتغير العشوائي ذو البعدين

1.1.3. تعريف المتغير العشوائي ذو البعدين

ليكن $(S,\Im)$ الفضاء القابل للاحتمال المرفق للتجربة العشوائية ξ . X و Y متغيران عشوائيان معرفان على نفس الفضاء. المتغير العشوائي ذو البعدين $V=(X,Y)$ هو تطبيق من S نحو R^2 .

$$V=(X,Y): S \to R^2$$
$$s \mapsto (X,Y)(s)=(X(s),Y(s))=(x,y)$$

حيث: $\forall (x,y)\in R^2 \quad ,\{s\in S : X(s)\le x, Y(s)\le y\}\in \Im$

ملاحظة 1.3. يكون الثنائي المرتب (X,Y) متغيرا عشوائيا على $(S,\Im)$ إذا وفقط إذا كان كل من X و Y متغيرا عشوائيا على $(S,\Im)$.

2.1.3. تعريف التوزيع الاحتمالي المشترك لمتغير عشوائي ذو البعدين

ليكن $(S,\Im,P)$ الفضاء الاحتمالي المرفق للتجربة العشوائية ξ و ليكن (X,Y) متغير عشوائي ذو البعدين معرف على الفضاء الاحتمالي $(S,\Im)$. نعرف التوزيع الاحتمالي المشترك $P_{(X,Y)}$ للمتغير (X,Y) بما يلي:

$$\forall B\in B_{R^2}\subseteq R^2,\quad P_{(X,Y)}(B)=P[(X,Y)\in B]$$ [3].

3.1.3. تعريف دالة التوزيع التراكمي المشتركة لمتغير عشوائي ذو البعدين

[3] حيث B_{R^2} هي العشيرة البوريلية لـ R^2 وهي أصغر σ-جبر تحتوي على المستطيلات من الشكل $]-\infty,x]\times]-\infty,y]$.

ليكن $(S,\Im,P)$ الفضاء الاحتمالي المرفق للتجربة العشوائية ξ و ليكن (X,Y) متغير عشوائي ذو البعدين معرف على الفضاء الاحتمالي $(S,\Im)$. دالة التوزيع التراكمي المشتركة للمتغير (X,Y) معرفة كما يلي:

$$F : R^2 \to [0,1]$$
$$(x,y) \mapsto F(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$$

نظرية 1.3. (خواص دالة التوزيع التراكمي لمتغير عشوائي ذو البعدين) ليكن (X,Y) متغير عشوائي ذو البعدين و $F(x,y)$ دالة التوزيع التراكمي لدينا:

1. $\forall (x,y) \in R^2 \;\; ; \;\; 0 \le F(x,y) \le 1$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty \\ \text{أو} \\ y\to-\infty}} F(x,y) = 0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ \text{و} \\ y\to+\infty}} F(x,y) = 1$.
3. الدالة $F(x,y)$ متزايدة بالنسبة لكل من المتغيرين X و Y.
4. الدالة $F(x,y)$ مستمرة عن يمين ويسار كل نقطة من R^2 .
5. $\forall \;\; a,b,c,d \in R \;\; ; \;\; a<b \;\; ; c<d \;\; ; \;\; P(a<X\le b, c<Y\le d) = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c)$

2.3. المتغير العشوائي ذو البعدين المنفصل

1.2.3. تعريف المتغير العشوائي ذو البعدين المنفصل

ليكن X و Y متغيران عشوائيان (حقيقيان) معرفان على نفس الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$. يكون الزوج (X,Y) متغيرا عشوائيا منفصلا إذا كانت مجموعة قيمه $R_{(X,Y)}$ مجموعة منتهية أو غير منتهية و قابلة للعد من نقاط R^2 . $R_{(X,Y)} = \{\, (x_i,y_j) \;,\; i \in N^*, \;\; j \in N^* \}$

2.2.3. التوزيع الاحتمالي المشترك لمتغير عشوائي ذو البعدين منفصل

ليكن (X,Y) متغير عشوائي ذو البعدين منفصل معرف على الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$ و $R_{(X,Y)}$ مجموعة قيمه .لكل ثنائي (x_i,y_j) نرفق العدد $P(x_i,y_j)$ بحيث **دالة التوزيع الاحتمالية المشتركة** للمتغير (X,Y) تحقق الشرطين التاليين:

1. $\forall (i,j) \;,\;\; P_{ij} = P(X=x_i, Y=y_j) \ge 0$
2. $\sum\limits_{i}\sum\limits_{j} P_{ij} = \sum\limits_{i}\sum\limits_{j} P(X=x_i, Y=y_j) \;\; =1$

ملاحظة 2.3. $\forall B \in B_{R^2} \subseteq R^2, \;\; P[(X,Y)\in B] = \sum\sum\limits_{x\in B} P(X=x, Y=y)$.

ملاحظة 3.3. التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي ذو البعدين منفصل يعطى على شكل جدول أو على شكل صيغته الرياضية.

نفترض أن $R_{(X,Y)} = \{(x_i y_j), 1\le i \le n \;\; ; \;\; 1\le j \le m\}$ ، جدول التوزيع الاحتمالي يعطى على شكل التالي:

$Y \backslash X$	x_1	....	x_i	....	x_n
y_1	p_{11}		p_{i1}		p_{n1}
....					
y_j	p_{1j}		p_{ij}		p_{nj}
....					
y_m	p_{1m}		p_{im}		p_{nm}

3.2.3. دالة التوزيع التراكمي المشتركة لمتغير عشوائي ذو البعدين منفصل

ليكن (X,Y) متغير عشوائي ذو البعدين منفصل معرف على الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$ ، دالة التوزيع التراكمي $\mathrm{F}(x,y)$ معرفة كما يلي:

$$\forall (x,y)\in R^2,\quad \mathrm{F}(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}P(X=x_i,Y=y_j)$$

4.2.3. التوزيعات الاحتمالية الحدية لمتغير عشوائي ذو البعدين منفصل

من التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغير (X,Y) نستنتج التوزيعات الاحتمالية الحدية لكل من X و Y على التوالي.[4]

$$\forall i,\ P_{i\bullet}=P(X=x_i)=\sum_j P(X=x_i,Y=y_j)=\sum_j P_{ij}$$

$$\forall j,\ P_{\bullet j}=P(Y=y_j)=\sum_i P(X=x_i,Y=y_j)=\sum_i P_{ij}$$

البرهان:مهما يكن j الحوادث $(X=x_i)\cap(Y=y_j)$ متنافية فيما بينها.

$$\forall i,\ P(X=x_i)=P[(X=x_i)\cap \mathrm{S}]==P\left((X=x_i)\cap\left(\bigcup_{\mathrm{j=1}}^{\infty}(\mathrm{Y=y_j})\right)\right)=\sum_{j=1}^{\infty}P(X=x_i)\cap(Y=y_j)=\sum_{j=1}^{\infty}P_{ij}$$

مهما يكن i الحوادث $(X=x_i)\cap(Y=y_j)$ متنافية فيما بينها.

$$\forall i,\ P(X=x_j)=P[S\cap(\mathrm{Y=y_j})]==P\left(\left(\bigcup_{\mathrm{i=1}}^{\infty}(\mathrm{X}=x_i)\right)\cap(Y=y_j)\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(X=x_i)\cap(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}P_{ij}$$

مثال 1.3. $\xi=$ {رمي قطعة نرد متزنة}. ليكن X و Y متغيران عشوائيان معرفان كما يلي: X يأخذ القيمة 1 إذا كان الوجه المتحصل عليها رقم فردي والقيمة 2 إذا كان الوجه المتحصل عليها رقم زوجي و Y يأخذ القيمة 0 إذا ظهر الوجه 1 والقيمة 1 إذا ظهر الوجه 6 و يأخذ القيمة 2 عند العكس.

1.تعيين دالة التوزيع الاحتمالية المشتركة للمتغير (X,Y) ودالتا التوزيع الاحتمالي الحدي لـ X و لـ Y .

$X \backslash Y$	0	1	2	$P_{i\bullet}$
1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{2}{6}$	$p_{1\bullet}=\frac{3}{6}$
2	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$p_{2\bullet}=\frac{3}{6}$
$P_{\bullet j}$	$P_{\bullet 1}=\frac{1}{6}$	$P_{\bullet 2}=\frac{1}{6}$	$P_{\bullet 3}=\frac{4}{6}$	$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}P_{ij}=\sum_{i=1}^{2}P_{i\bullet}=\sum_{j=1}^{3}P_{\bullet j}$

2. تعيين دالة التوزيع التراكمي المشتركة للمتغير (X,Y) في جدول.

$X \backslash Y$	0	1	2
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	1

3.إيجاد التوزيع الاحتمالي الحدي لـ X : $\forall i,\ P_{i\bullet}=P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{3}P(X=x_i,Y=y_j)=\sum_{j=1}^{3}P_{ij}$

[4] عموما العكس غير ممكن.

x_i	1	2	Σ
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

4.إيجاد التوزيع الاحتمالي الحدي Y : $\forall j\ ,\ P_{\bullet j}=P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{2}P(X=x_i,Y=y_j)=\sum_{i=1}^{2}P_{ij}$

y_j	0	1	2	Σ
$P(Y=y_j)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	1

5.حساب الاحتمالات الآتية: $P(X=1,Y=2)$ ، $P(X=1,Y\geq 1)$ ، $P(X+Y\geq 3)$ ، $P(X\times Y<1)$ و $P(1<X\leq 2,Y\leq 1)$.

$$P(X=1,Y=2)=p_{13}=\frac{1}{3}$$

$$P(X=1,Y\geq 1)=P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=2)=p_{12}+p_{13}=\frac{1}{3}$$

$$P(X+Y\geq 3)=P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)+P(X=2,Y=2)=p_{13}+p_{22}+p_{23}=\frac{5}{6}$$

$$P(X\times Y<1)=P(X=1,Y=0)+P(X=2,Y=0)=p_{11}+p_{21}=\frac{1}{6}$$

$$P(1<X\leq 2,Y\leq 1)=P(X\leq 2,Y\leq 1)-P(X\leq 1,Y\leq 1)=F(2,1)-F(1,1)=\frac{1}{6}$$

5.2.3. التوزيعات الاحتمالية الشرطية لمغير عشوائي ذو البعدين منفصل

ليكن (X,Y) متغير عشوائي ذو البعدين منفصل معرف على الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$. التوزيع الاحتمالي الشرطي للمتغير X شرط الحادث $Y=y_j$ معرف كما يلي:

$$\forall i,\ \ P_{i/j}=P\left(X=x_i/Y=y_j\right)=\frac{P(X=x_i\ ,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{P_{ij}}{P_{\bullet j}}\quad ,P_{\bullet j}\neq 0$$

والتوزيع الاحتمالي الشرطي لـ Y شرط $X=x_i$ معرف كما يلي:

$$\forall j,\ \ P_{j/i}=P\left(Y=y_j/X=x_i\right)=\frac{P(X=x_i\ ,Y=y_j)}{P(X=x_i)}=\frac{P_{ij}}{P_{i\bullet}}\quad ,P_{i\bullet}\neq 0$$

البرهان: $\sum_i P_{i/j}=\sum_i\frac{P_{ij}}{P_{\bullet j}}=\frac{\sum_i P_{ij}}{P_{\bullet j}}=\frac{P_{\bullet j}}{P_{\bullet j}}=1$ و $\sum_j P_{j/i}=\sum_j\frac{P_{ij}}{P_{i\bullet}}=\frac{\sum_j P_{ij}}{P_{i\bullet}}=\frac{P_{i\bullet}}{P_{i\bullet}}=1$

6.2.3. دالة التوزيع التراكمي الشرطية لمتغير عشوائي ذو البعدين منفصل

ليكن (X,Y) متغير عشوائي ذو البعدين منفصل معرف على الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$. دالة التوزيع التراكمي الشرطي للمتغير X شرط الحادث $Y=y_j$ معرفة كما يلي:

$$\forall x,\ \ F\left(x/Y=y_j\right)=\frac{P(X\leq x,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{\sum_{x_i\leq x}P(X=x_i\ ,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}\quad ,\quad P(Y=y_j)>0$$

ودالة التوزيع التراكمي الشرطي للمتغير Y شرط الحادث $X=x_i$ معرف كما يلي:

$$\forall y,\ F\left(y \big/ X = x_i\right) = \frac{P(X = x_i, Y \le y)}{P(X = x_i)} = \frac{\sum\limits_{y_j \le y} P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)} \quad , \quad P(X = x_i) > 0$$

7.2.3. المتغيرات العشوائية المنفصلة المستقلة

ليكن (X,Y) متغير عشوائي ذو البعدين منفصل معرف على الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$. يكون المتغيران X و Y مستقلين إذا وفقط إذا من أجل كل ثنائي (i,j) كان الحادثان $\{X = x_i\}$ و $\{Y = y_j\}$ مستقلين.

أي: X و Y مستقلان $\Leftrightarrow$ $\forall (i,j)\ ;\ P_{ij} = P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) = P(X = x_i)\cdot P(Y = y_j) = P_{i\bullet}\,.\,P_{\bullet j}$

ملاحظة 4.3. إذا كان X و Y مستقلين لدينا:

- $\forall (x,y)\ ;\ F(x,y) = F_X(x)\cdot F_Y(y)$
- $\forall (i,j)\ ;\ P_{i/j} = P_{i\bullet} \ \wedge\ P_{j/i} = P_{\bullet j}$

مثال 2.3. باستعمال معطيات المثال السابق (المثال 1.3)

إيجاد التوزيع الاحتمالي الشرطي للمتغير X شرط $Y = 2$ والتوزيع الاحتمالي الشرطي للمتغير Y شرط $X = 1$ باستعمال المثال السابق.

$$\forall i = 1,2,\ P\left(X = x_i \big/ Y = 2\right) = \frac{P(X = x_i, Y = 2)}{P(Y = 2)} = \frac{3}{2} P(X = x_i, Y = 2)$$

x_i	1	2	Σ
$P\left(X = x_i \big/ Y = 2\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$$\forall j = 1,2,3,\ P\left(Y = y_j \big/ X = 1\right) = \frac{P(X = 1, Y = y_j)}{P(X = 1)} = 2P(X = 1, Y = y_j)$$

y_j	0	1	2	Σ
$P\left(Y = y_j \big/ X = 1\right)$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	1

3.3. المتغير العشوائي ذو البعدين المستمر

1.3.3. تعريف المتغير العشوائي ذو البعدين المستمر

ليكن X و Y متغيران عشوائيان (حقيقيان) معرفان على نفس الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$. يكون الزوج (X,Y) متغيرا عشوائيا مستمرا إذا كانت مجموعة قيمه $R_{(X,Y)}$ غير منتهية وغير قابلة للعد من R^2 .

2.3.3. التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي ذو البعدين مستمر

ليكن X و Y متغيران عشوائيان (حقيقيان) مستمران معرفان على نفس الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$. نسمى **دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة** للمتغير (X,Y) الدالة المستمرة $f(x,y)$ (إذا وجدت) و التي تحقق الشرطين الآتين:

1. $\forall (x,y) \in R^2 \quad , \quad f(x,y) \ge 0$
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dxdy = 1$

ملاحظة 5.3. ليكن (X,Y) متغير عشوائي ذو البعدين مستمر، $f(x,y)$ دالة كثافته الاحتمالية المشتركة فإن:

1. $\forall B \in B_{R^2} \subseteq R^2\ ;\quad P(B) = \iint\limits_B f(x,y)\, dxdy$
2. $\forall a,b,c,d \ / a < b,\ c < d \quad ;\quad P(X \in]a,b] \times]c,d]) = P(a < X \le b, c < Y \le d) = \int\limits_a^b\int\limits_c^d f(x,y)\, dxdy$

ملاحظة 6.3. $\forall (x,y) \in R^2 \quad ;\quad P(X = x, Y = y) = P(X \le x, Y = y) = P(X = x, Y \le y) = ... = 0$

3.3.3. دالة التوزيع التراكمي المشتركة لمتغير عشوائي ذو البعدين مستمر

ليكن (X,Y) متغير عشوائي ذو البعدين مستمر، $f(x,y)$ دالة كثافته الاحتمالية المشتركة. دالة التوزيع التراكمي المشتركة للمتغير (X,Y) معرفة كما يلي:

$$\forall (x,y) \in R^2, \quad \mathrm{F}(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

و لدينا:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

4.3.3. التوزيعات الاحتمالية الحدية لمتغير عشوائي ذو البعدين مستمر

نظرية1.3. ليكن (X,Y) متغير عشوائي ذو البعدين مستمر معرف على الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$، $F(x,y)$ توزيعه التراكمي المشترك، $F_X(x)$ دالة التوزيع التراكمي لـ X و $F_Y(y)$ دالة التوزيع التراكمي لـ Y لدينا:

$$\forall x \in R \quad , \mathrm{F_X}(x) = \lim_{y \to +\infty} F(x,y) = F(x,+\infty) = F(x,.)$$

$$\forall y \in R \quad , \mathrm{F_Y}(y) = \lim_{x \to +\infty} F(x,y) = F(+\infty,y) = F(.,y)$$

البرهان: لتكن $f_X(x)$ دالة الكثافة الاحتمالية لـ X و $f_Y(y)$ دالة الكثافة الاحتمالية لـ Y.

$$\forall x \in R \quad , \mathrm{F_X}(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,\mathrm{du} = \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,dv \right) du = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \lim_{y \to +\infty} F(x,y)$$

$$\forall y \in R \quad , \mathrm{F_Y}(y) = P(Y \le y) = \int^{y} f_Y(v)\,\mathrm{dv} = \int^{y} \left(\int^{+\infty} f(u,v)\,du \right) dv = \int^{y} \int^{+\infty} f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \lim F(x,y)$$

نظرية 2.3. ليكن (X,Y) متغير عشوائي ذو البعدين مستمر معرف على الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$، $f(x,y)$ دالة كثافته الاحتمالية المشتركة لدينا:

$$\forall x \in R \quad , f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{dy} \quad \text{و} \quad \forall y \in R \quad , f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{dx}$$

حيث: $f_X(x)$ هي دالة الكثافة الحدية لـ X و $f_Y(y)$ هي دالة الكثافة الحدية لـ Y.

البرهان:

$$\forall x \in R \quad , f_X(x) = \mathrm{F}'_X(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int^{x} \left(\int^{+\infty} f(u,v)\,\mathrm{dv} \right) du \right) = \int^{+\infty} f(u,v)\,\mathrm{dv}$$

$$\forall y \in R \quad , f_Y(\mathrm{y}) = \mathrm{F}'_Y(y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int^{y} \left(\int^{+\infty} f(u,v)\,\mathrm{du} \right) dv \right) = \int^{+\infty} f(u,v)\,\mathrm{du}$$

مثال 3.3. ليكن (X,Y) متغير عشوائي ذو البعدين مستمر و $f(x,y)$ دالة كثافته الاحتمالية المشتركة:

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy & 0 < x < 1 \quad \text{و} \; 0 < y < 1 \\ 0 & \text{ع.ع} \end{cases}$$

1.نتحقق أن $f(x,y)$ فعلا دالة كثافة احتمالية مشتركة.

$$\forall (x,y) \in]0,1[\times]0,1[\quad , \quad f(x,y) > 0$$

$$\int^{+\infty} \int^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int^{1} \int^{1} 4xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\int^{1} x\left(\int^{1} y\,dy \right) \mathrm{d}x = 4\int^{1} x\left(\left[\frac{y^2}{2} \right]^{1} \right) \mathrm{d}x = 2\int^{1} x\mathrm{d}x = 2\left[\frac{x^2}{2} \right]^{1} = 1$$

2. تعيين دالة التوزيع التراكمي المشتركة $\mathrm{F}(x,y)$ لـ (X,Y).

$$\forall \; (\mathrm{x,y}) \in]0,1[\times]0,1[\;, \; \mathrm{F(x,y)} = \int_0^x \int_0^y 4\,\mathrm{u\,v\,du}\,dv = 4\int_0^x u\left(\left[\frac{v^2}{2} \right]_0^y \right) du = 4\frac{y^2}{2}\int_0^x u\,du = 4\frac{y^2}{2}\left[\frac{u^2}{2} \right]_0^x = x^2 y^2$$

$$\mathrm{F}(x,y)=\begin{cases}0 & x\le 0 \quad \text{أو } y\le 0\\ x^2 & 0<x<1 \quad \text{و } y\ge 1\\ x^2y^2 & 0<x<1 \quad \text{و } 0<y<1\\ y^2 & x\ge 1 \quad \text{و } 0<y<1\\ 1 & x\ge 1 \quad \text{و } y\ge 1\end{cases}$$

3. تعيين دالة الكثافة الحدية $f_X(x)$ لـ X و دالة الكثافة الحدية $f_Y(y)$ لـ Y.

$$\forall x\in]0,1[\ ,\ f_X(x)=\int_0^1 4\mathrm{xy}\,\mathrm{dy}=x\left[2y^2\right]_0^1=2x \qquad \text{و} \qquad \forall y\in]0,1[\ ,\ f_Y(y)=\int_0^1 4\mathrm{xy}\,\mathrm{dx}=y\left[2x^2\right]_0^1=2y$$

$$f_X(x)=\begin{cases}2x & x\in]0,1[\\ 0 & x\notin]0,1[\end{cases} \qquad \text{و} \qquad f_Y(\mathrm{y})=\begin{cases}2y & y\in]0,1[\\ 0 & y\notin]0,1[\end{cases}$$

4. باستعمال دالة التوزيع التراكمي المشتركة $\mathrm{F}(x,y)$ لـ (X,Y) عين دالة التوزيع التراكمي لكل من X و Y.

$$\mathrm{F_X}(x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=F(x,1)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ x^2 & 0<x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases} \qquad \text{و} \qquad \mathrm{F_Y}(y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=F(1,y)=\begin{cases}0 & \mathrm{y}\le 0\\ y^2 & 0<y<1\\ 1 & \mathrm{y}\ge 1\end{cases}$$

5. حساب الاحتمالات التالية: $P\left(X\le\frac{1}{2},Y\le\frac{1}{2}\right)=F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}$ ، $P\left(X=1,Y\le\frac{1}{3}\right)=0$ ،

$$P\left(\frac{1}{3}<X\le\frac{2}{3},Y\le\frac{1}{2}\right)=F\left(\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right)-F\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{12}$$

5.3.3. التوزيعات الاحتمالية الشرطية لمتغير عشوائي ذو البعدين مستمر

ليكن (X,Y) متغير عشوائي ذو البعدين مستمر و $f(x,y)$ دالة كثافته الاحتمالية المشتركة.

دالة الكثافة الشرطية لـ X عِلْما أن $Y=y$ معرفة كما يلي: $f_{X/Y=y}(x)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\dfrac{f(x,y)}{f(.,y)}$

دالة الكثافة الشرطية لـ Y عِلْما أن $X=x$ معرفة كما يلي: $f_{Y/X=x}(y)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\dfrac{f(x,y)}{f(x,.)}$

6.3.3. دالة التوزيع التراكمي الشرطية لمتغير عشوائي ذو البعدين مستمر

ليكن (X,Y) متغير عشوائي ذو البعدين مستمر معرف على الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$. دالة التوزيع التراكمي الشرطي للمتغير X علما $a\le Y\le b$ معرفة كما يلي:

$$\forall x,\ F\left(x/_{a\le Y\le b}\right)=\frac{P(X\le x\,,a\le Y\le b)}{\cdot}=\frac{\int_{-\infty}^{x}\int_a^b f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\cdot}=\frac{\int_{-\infty}^{x}\left(\int_a^b f(u,v)\,dv\right)du}{\cdot}$$

و لدينا: $$\forall x,\quad f_{x/a\le Y\le b}(x)=F'\left(x/_{a\le Y\le b}\right)=\frac{\int_a^b f(u,v)\,dv}{\int_a^b f_Y(v)\,\mathrm{dv}}$$

دالة التوزيع التراكمي الشرطي للمتغير Y علما $a\le X\le b$ معرفة كما يلي:

$$\forall y,\ F\left(y/_{a\le X\le b}\right)=\frac{P(a\le X\le b\,,Y\le y)}{\cdot}=\frac{\int_a^b\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\cdot}=\frac{\int_{-\infty}^{y}\left(\int_a^b f(u,v)\,du\right)dv}{\cdot}$$

و لدينا: $$\forall y,\quad f_{y/_{a\le X\le b}}(y)=F'\left(y/_{a\le X\le b}\right)=\frac{\int_a^b f(u,v)\,du}{\int_a^b f_X(u)\,\mathrm{d}u}$$

ملاحظة 6.3.

$$\forall x,\quad F\left(x/_{Y}\right)=\int^{x} f_{X/}\ (u)\,\mathrm{d}u$$

$$\forall x,\quad F\left(x/_{Y}\right)=P\left(X\le x/_{Y}\right)=\ Lim\ F(x,y)\frac{P(X\le x, Y=y)}{\ }=\frac{\int_{-\infty}^{x}\int_{a}^{b} f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\ }=\frac{\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{a}^{b} f(u,v)\,dv\right)du}{\ }$$

7.3.3. المتغيرات العشوائية المستمرة المستقلة

ليكن (X,Y) متغير عشوائي ذو البعدين مستمر معرف على الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$ ، $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ دالتا الكثافة الاحتمالية لكل من X و Y على الترتيب. يكون المتغيران X و Y مستقلين إذا وفقط إذا من أجل كل عددين حقيقيين (x,y) لدينا: $\mathrm{f}(x,y)=f_X(x).f_Y(y)$ أي: X و Y مستقلان $\Leftrightarrow$ $\forall(x,y)\ ,\ f(x,y)=f_X(x).f_Y(y)$

ملاحظة 7.3. إذا كان X و Y مستقلين لدينا:

$\forall(x,y)\ ,\ F(x,y)=F_X(x).F_Y(y)$ حيث $F_X(x)$ و $F_Y(y)$ دالتا التوزيع التراكمي لكل من X و Y على الترتيب.

$f_{X/_{Y=y}}(x)=f_X(x)$ و $f_{Y/_{X=x}}(y)=f_Y(y)$ حيث $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ دالتا الكثافة الاحتمالية لكل من X و Y على الترتيب.

مثال 4.3. باستعمال معطيات المثال السابق (المثال 3.3)

1. إيجاد التوزيع الاحتمالي الشرطي للمتغير X علما $Y=\frac{1}{2}$ ثم استنتاج $E\left(X/_{Y=\frac{1}{2}}\right)$ و $V\left(X/_{Y=\frac{1}{2}}\right)$.

$$f_{X/_{Y=\frac{1}{2}}}(x)=\begin{cases}2x & x\in\,]0,1[\\ 0 & x\notin\,]0,1[\end{cases}\ ،\quad E\left(X/_{Y=\frac{1}{2}}\right)=\frac{2}{3}\ ،\quad V\left(X/_{Y=\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{18}$$

2. X و Y مستقلان لأن: $\forall(x,y)\ ,\ f(x,y)=4xy=2x.2y=f_X(x).f_Y(y)$

3. حساب الاحتمالات التالية: $E\left(X\le\frac{1}{2}/_{Y=\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{4}$ و $E\left(\frac{1}{3}<X\le\frac{2}{3}/_{\frac{1}{3}<Y\le\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{3}$

مثال 5.3. ليكن (X,Y) متغير عشوائي و $f(x,y)$ دالة كثافته الاحتمالية المشتركة: $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x\,y}{2} & 0\le y\le x\le 2\\ 0 & \text{ع.ع}\end{cases}$

1. نتحقق أن $f(x,y)$ فعلا دالة كثافة احتمالية مشتركة

$$\forall(x,y)\in[0,2]\times][0,2]\ ,\quad y\le x:\ f(x,y)>0$$

$$\int^{+\infty}\int^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int^{2}\int^{x}\frac{xy}{\ }\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\ }\int^{1}x\left(\int^{x}y\,dy\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{\ }\int^{2}\left(\left[x\frac{y^2}{\ }\right]^{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{\ }\int^{2}\frac{x^3}{\ }\mathrm{d}x=\frac{1}{\ }\left[\frac{x^4}{\ }\right]^{2}=\frac{1}{\ }\left(\frac{16}{\ }\right)=1$$

2. تعيين دالة التوزيع التراكمي المشتركة $F(x,y)$ لـ (X,Y) .

$$\forall\,0\le y\le x\le 2\ ,\ \mathrm{F}(x,y)=\int^{y}\int^{x}\frac{uv}{\ }\,dv\mathrm{d}u=\frac{1}{\ }\int^{y}v\left(\left[\frac{u^2}{\ }\right]^{x}\right)\mathrm{d}v=\frac{1}{\ }\int^{y}v\left(\frac{x^2-v^2}{\ }\right)\mathrm{d}v=\frac{1}{\ }\left[\frac{v^2x^2}{\ }-\frac{v^4}{\ }\right]^{y}=\frac{y^2}{\ }\left(2x^2-y^2\right)$$

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & x\le 0 \text{ أو } y\le 0\\ \frac{1}{16}x^4 & 0\le x\le 2 \text{ و } y>2\\ \frac{y^2}{16}(2x^2-y^2) & 0\le x\le 2 \text{ و } 0\le y\le 2\\ \frac{y^2}{16}(8-y^2) & x>2 \text{ و } 0\le y\le 2\\ 1 & x>2 \text{ و } y>2\end{cases}$$

3. تعيين دالة الكثافة الحدية $f_X(x)$ لـ X و دالة الكثافة الحدية $f_Y(y)$ لـ Y.

$$\forall y\in[0,2]\ ;\ f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_{y}^{2}\frac{1}{2}xydy=\frac{1}{2}y\left[\frac{x^2}{2}\right]_y^2=\frac{y}{4}(4-y^2) \quad ، \quad f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}x^3 & x\in[0,2]\\ 0 & \text{ع.ع}\end{cases}$$

$$\forall x\in[0,2]\ ;\ f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_{0}^{x}\frac{1}{2}xydy=\frac{1}{2}x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x=\frac{1}{4}x^3 \quad ، \quad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{y}{4}(4-y^2) & x\in[0,2]\\ 0 & \text{ع.ع}\end{cases}$$

4. باستعمال دالة التوزيع التراكمي المشتركة $F(x,y)$ لـ (X,Y) نعين دالتا التوزيع التراكمي لكل من X و Y .

$$\forall x\in R\ ;F_X(x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=F(x,x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{16}x^4 & x\in[0,2]\\ 1 & x>2\end{cases} \quad \text{و} \quad \forall y\in R\ ;F_Y(y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=F(2,y)=\begin{cases}0 & y<0\\ \frac{y^2}{16}(8-y^2) & y\in[0,2]\\ 1 & y>2\end{cases}$$

4.3. المميزات العددية لمتغير عشوائي ذو البعدين

1.4.3. تعريف التوقع الرياضي لمتغير عشوائي ذو البعدين

- ليكن (X,Y) متغير عشوائي ذو البعدين معرف على الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$. التوقع الرياضي للمتغير (X,Y) هو الشعاع $(E(X),E(Y))$ إذا وجد بحيث:

إذا كان (X,Y) زوج عشوائي منفصل: $E(X)=\sum_{x_i\in R_X}\sum_{y_j\in R_Y} x_i\,P(X=x_i,Y=y_j)$ و $E(Y)=\sum_{x_i\in R_X}\sum_{y_j\in R_Y} y_j\,P(X=x_i,Y=y_j)$

إذا كان (X,Y) زوج عشوائي مستمر: $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x,y)dxdy$ و $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\,f(x,y)dxdy$

- ليكن (X,Y) متغير عشوائي ذو البعدين و φ تطبيقا من R^2 نحو R حيث $\varphi(X,Y)$ متغير عشوائي.

إذا كان (X,Y) متغير عشوائي منفصل لدينا: $E(\varphi(X,Y))=\sum_{x_i\in R_X}\sum_{y_i\in R_Y}\varphi(x_i,y_j)\,P(X=x_i,Y=y_j)$

إذا كان (X,Y) متغير عشوائي مستمر لدينا: $E(\varphi(X,Y))=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\,f(x,y)dxdy$

نظرية 3.3. (خواص التوقع الرياضي) ليكن (X,Y) متغير عشوائي ذو البعدين لدينا:

1. $\forall a\in R\ ,\ E(aX,aY)=a\,E(X,Y)$
2. $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
3. إذا كان X و Y مستقلين فإن: $E(XY)=E(X)\,E(Y)$

البرهان: 1. $E(aX,aY)=(E(aX),E(aY))=(aE(X),aE(Y))=a(E(X),E(Y))=aE(X,Y)$

2. إذا كان (X,Y) منفصل لدينا: $E(X+Y)=\sum_{x_i\in R_X}\sum_{y_i\in R_Y}(x_i+y_j)\,P(X=x_i,Y=y_j)$

$$E(X+Y)=\sum_{x_i\in R_X}\sum_{y_i\in R_Y}x_i\,P(X=x_i,Y=y_j)+\sum_{x_i\in R_X}\sum_{y_i\in R_Y}y_j\,P(X=x_i,Y=y_j)=E(X)+E(Y)$$

إذا كان (X,Y) مستمر لدينا: $\mathrm{E}(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)\,f(x,y)dxdy$

$$\mathrm{E}(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y\,f(x,y)dxdy=E(X)+\mathrm{E}(Y)$$

3. إذا كان (X,Y) منفصل لدينا:

$$\mathrm{E}(XY)=\sum_{x_i\in R_X}\sum_{y_i\in R_Y}x_iy_jP(X=x_i,Y=y_j)=\sum_{x_i\in R_X}\sum_{y_i\in R_Y}x_iy_jP(X=x_i)P(Y=y_j)$$

$$\mathrm{E}(XY)=\sum_{x_i\in R_X}x_iP(X=x_i)\sum_{y_i\in R_Y}y_jP(X=x_i)P(Y=y_j)=E(X)\cdot\mathrm{E}(Y)$$

إذا كان (X,Y) مستمر لدينا: $\mathrm{E}(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\,f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\,f(x).f(y)dxdy$

$$\mathrm{E}(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}yf(y)dy=E(X).\mathrm{E}(Y)$$

نظرية 4.3.ليكن (X,Y) متغير عشوائي معرف على الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$. إذا كان المتغيران العشوائيان X و Y مستقلين فإن:

$$\forall t\in\mathrm{R},\quad \mathrm{M}_{X+Y}(t)=\mathrm{M}_X(t)\,\mathrm{M}_Y(t)$$

البرهان: $\forall t\in\mathrm{R},\quad \mathrm{M}_{X+Y}(t)=E\left(e^{t(X+Y)}\right)=E\left(e^{tX}.e^{tY}\right)=E\left(e^{tX}\right).E\left(e^{tY}\right)=\mathrm{M}_X(t).\,\mathrm{M}_Y(t)$

2.4.3. التباين ، التباين المزدوج و معامل الارتباط

التباين المزدوج

التباين المزدوج للمتغير العشوائي ذو البعدين (X,Y) معرف كما يلي: $Cov(X,Y)=E[(X-E(X)).(Y-E(Y))]$

نظرية 5.3 (خواص التباين المزدوج) .ليكن (X,Y) متغير عشوائي ذو البعدين فإن:

1. $Cov(X,Y)=E(X\,Y)-E(X)\,E(Y)$
2. $\forall a\in R\ ,\ Cov(a,X)=Cov(X,a)=0$
3. $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$
4. $\forall a,b\in R\ ,\ Cov(aX,bY)=a\,b\,Cov(X,Y)$
5. ليكن X ، Y و Z ثلاث متغيرات عشوائية لدينا: $\mathrm{Cov}(X+Y,Z)=\mathrm{Cov}(X,Z)+\mathrm{Cov}(Y,Z)$

البرهان:1. $Cov(X,Y)=E[(X-E(X).(Y-E(Y)]=E[X\,Y-YE(X)-XE(Y)+E(X)\,E(Y)]=E(X\,Y)-E(X)\,E(Y)$

2. $Cov(a,X)=E(aX)-E(a)\,E(X)=aE(X)-a\,E(X)=0$

3. $Cov(X,Y)=E(X\,Y)-E(X)\,E(Y)=E(Y\,X)-E(Y)\,E(X)=Cov(Y,X)$

4. $Cov(aX,bY)=E(aX.bY)-E(aX)\,E(bY)=ab\big(E(XY)-E(X)E(Y)\big)=abCov(X,Y)$

5. $Cov(X+Y,Z)=E\big((X+Y)Z\big)-E(X+Y)\,E(Z)=E(XZ)-E(YZ)-E(X)E(Z)-E(Y)E(Z)=Cov(X,Z)-Cov(Y,Z)$

ملاحظة 8.3. إذا كان المتغيران العشوائيان X و Y مستقلين فإن: $Cov(X,Y)=0$ لكن العكس غير صحيح.

نظرية 6.3. (خواص التباين) ليكن (X,Y) زوج عشوائي معرف على الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$ فإن:

$$\forall a,b\in R\ ,\ V(aX+bY)=a^2V(X)+b^2V(Y)+2abCov(X,Y)$$

البرهان: $V(aX+bY)=Cov(aX+bY,aX+bY)=Cov(aX,aX)+Cov(bY,bY)+2Cov(aX,bY)=a^2V(X)+b^2V(Y)+2abCov(X,Y)$

إذا كان $a=1$ و $b=1$ لدينا: $V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2Cov(X,Y)$

ملاحظة 9.3. إذا كان المتغيران العشوائيان X و Y مستقلين فإن: $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$

مصفوفة التباين و التباين المزدوج

مصفوفة التباين و التباين المزدوج للزوج العشوائي (X,Y) هي المصفوفة المربعة المعرفة كما يلي:

$$\Sigma = E\left[(V-E(V)).(V-E(V)^T)\right] = \begin{pmatrix} V(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & V(Y) \end{pmatrix}$$

حيث $V = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ و Σ مصفوفة متناظرة.

معامل الارتباط الخطي

ليكن X و Y متغيران عشوائيان معرفان على نفس الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$. معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين X و Y هو النسبة بين التباين المزدوج $Cov(X,Y)$ و الجداء $\sigma_X.\sigma_Y$ حيث $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$ و $\sigma_Y = \sqrt{V(Y)}$.

$$r_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

نظرية 7.3. ليكن X و Y متغيران عشوائيان معرفان على نفس الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$ و r_{XY} معامل الارتباط الخطي بين X و Y فإن: $-1 \le r_{XY} \le 1$

البرهان: نعتبر المتغير العشوائي $aX+b$ حيث a ثابت.

$$f(a) = V(aX+b) = a^2V(X) + 2aCov(X,Y) + V(Y) \ge 0$$

$f(a)$ هو كثير حدود من الدرجة الثانية بالسبة لـ a موجب و بالتالي المميز Δ سيكون سالب أو معدوم.

$$\Delta = 4\left(Cov(X,Y)\right)^2 - 4V(X)V(Y) \le 0 \;\Rightarrow\; \frac{\left(Cov(X,Y)\right)^2}{V(X)V(Y)} \le 1 \;\Rightarrow\; \frac{|Cov(X,Y)|}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} \le 1 \;\Rightarrow\; |r_{XY}| \le 1$$

ملاحظة 10.3. إذا كان المتغيران العشوائيان X و Y مستقلين فإن: $r_{XY} = 0$

مثال 6.3. ليكن (X,Y) متغير عشوائي ذو البعدين منفصل دالة توزيعه الاحتمالي المشتركة معطاة كما يلي:

$$\forall (i,j) \in \{1,2\}^2 \quad ; \quad \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i, Y = y_j) = p^{x_i+y_j}(1-p)^{2-(x_i+y_j)} \quad , x_i \in \{0,1\}\,,\; y_j \in \{0,1\}$$

.1 $E(X,Y) = \left(E(X),E(Y)\right) = (p,p)$

$$\mathrm{E}(X) = P(X=1,Y=0) + P(X=1,Y=1) = p(1-p) + p^2 = p$$ و $$\mathrm{E}(Y) = P(X=1,Y=1) + P(X=0,Y=1) = p^2 + p(1-p) = p$$

.2 إيجاد $Cov(X,Y)$ ثم استنتاج r_{XY}.

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \sum_{x_i \in R_X}\sum_{y_j \in R_Y} x_i y_j\, P(X = x_i, Y = y_j) - E(X)E(Y) = p^2 - p^2 = 0 \;\Rightarrow\; r_{XY} = 0$$

.3 إيجاد مصفوفة التباين و التباين المزدوج للمتغير العشوائي (X,Y).

$$\mathrm{V(X)} = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E(X)})^2 = \sum_{x_i \in R_X}\sum_{y_j \in R_Y} x_i^2\, P(X = x_i, Y = y_j) - (\mathrm{E(X)})^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

$$\mathrm{V(Y)} = \mathrm{E}(Y^2) - (\mathrm{E(Y)})^2 = \sum_{x_i \in R_X}\sum_{y_j \in R_Y} y_j^2\, P(X = x_i, Y = y_j) - (\mathrm{E(Y)})^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} V(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & V(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(1-p) & 0 \\ 0 & p(1-p) \end{pmatrix}$$

.4 المتغيران X و Y مستقلان : $\forall (x_i, y_j) \in \{0,1\}^2 \;\; ; \; P\left(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}\right) = \mathrm{P}(X = x_i)\cdot P(Y = y_j)$.

مثال 7.3. ليكن (X,Y) متغير عشوائي و $f(x,y)$ دالة كثافته الاحتمالية المشتركة:

$$f(x,y) = \begin{cases} 4y\,e^{-2x} & x \ge 0 \text{ و } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{ع.ع} \end{cases}$$

.1 إيجاد $E(X,Y) = \left(E(X),E(Y)\right) = \left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x,y)\,dxdy = \int_0^{+\infty}\int_0^1 4x\,y\,e^{-2x}dxdy = \int_0^{+\infty} 4x\,e^{-2x}\left(\int_0^1 y\,dy\right)dx = \int_0^{+\infty} 4x\,e^{-2x}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 dx = \int_0^{+\infty} 2x\,e^{-2x}dx = \frac{1}{2}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f(x,y)dxdy=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{1} 4y^2\, e^{-2x}dxdy=\int_{0}^{+\infty} 4e^{-2x}\left(\int_{0}^{1} y^2dy\right)dx=\int_{0}^{+\infty} 4e^{-2x}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 dx=\int_{0}^{+\infty}\frac{4}{3}\, e^{-2x}dx=\frac{2}{3}$$

2. إيجاد $Cov(X,Y)$ ثم استنتاج r_{XY} .

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{1} 4xy^2\, e^{-2x}dxdy-\frac{1}{3}=\int_{0}^{+\infty} 4xe^{-2x}\left(\int_{0}^{1} y^2dy\right)dx-\frac{1}{3}=\int_{0}^{+\infty}\frac{4}{3}xe^{-2x}dx-\frac{1}{3}=\left[\frac{-e^{-2x}}{3}\right]_0^{+\infty}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0\Rightarrow\ r_{XY}=0$$

3. إيجاد مصفوفة التباين و التباين المزدوج للمتغير العشوائي (X,Y) .

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{1} 4x^2\, y\, e^{-2x}dxdy-\frac{1}{4}=\int_{0}^{+\infty} 4x^2\, e^{-2x}\left(\int_{0}^{1} ydy\right)dx-\frac{1}{4}=\int_{0}^{+\infty} 4x^2\, e^{-2x}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 dx-\frac{1}{4}=\int_{0}^{+\infty} 2x^2\, e^{-2x}dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$V(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{1} 4y^3\, e^{-2x}dxdy-\frac{4}{9}=\int_{0}^{+\infty} 4e^{-2x}\left(\int_{0}^{1} y^3dy\right)dx-\frac{4}{9}=\int_{0}^{+\infty} 4e^{-2x}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^1 dx-\frac{4}{9}=\int_{0}^{+\infty} e^{-2x}dx-\frac{4}{9}=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$$

$$\Sigma=\begin{pmatrix} V(X) & Cov(X,Y)\\ Cov(X,Y) & V(Y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ 0 & \frac{1}{18}\end{pmatrix}$$

4. المتغيران X و Y مستقلان : $\forall x\geq 0, y\in]0,1[\ ,\ f(x,y)=4y\, e^{-2x}=2e^{-2x}\,.\,2y=f_X(x).f_Y(y)$

$$\forall y\in]0,1[\ ,\quad f_Y(y)=\int_{0}^{+\infty} 4y\, e^{-2x}dx=4\, y\left[-\frac{e^{-2x}}{2}\right]_0^{+\infty}=2\, y \quad \text{و} \quad \forall x\geq 0\ ,\quad f_X(x)=\int_{0}^{1} 4y\, e^{-2x}dy=4\, e^{-2x}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1=2\, e^{-2x}$$

5.3. الدالة المولدة للعزوم لمتغير عشوائي ذو البعدين

1.35. العزوم لمتغير عشوائي ذو البعدين

ليكن X و Y متغيران عشوائيان معرفان على نفس الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$. **العزم الغير المتمركز** من الرتبة p $(p\in N^*)$ بالنسبة للمتغير X و من الرتبة q $(q\in N^*)$ بالنسبة للمتغير Y معرف كما يلي:

$$m_{pq}(X,Y)=m_{pq}=E(X^p,Y^q)$$

العزم المتمركز من الرتبة p $(p\in N^*)$ بالنسبة للمتغير X و من الرتبة q $(q\in N^*)$ بالنسبة للمتغير Y معرف كما يلي:

$$\mu_{pq}(X,Y)=\mu_{pq}=E\big(((X-E(X))^p((Y-E(Y))^q\big)$$

ملاحظة 11.3. $\mu_{11}=E\big(((X-E(X))((Y-E(Y))\big)=Cov(X,Y)$

2.5.3. الدالة المولدة للعزوم

تعريف: ليكن X و Y متغيران عشوائيان معرفان على نفس الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$. الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي (X,Y) معرفة كما يلي:

$$\forall\ (t_1,t_2)\quad M_{(X,Y)}(t_1,t_2)=E\left(e^{t_1X+t_2Y}\right)$$

نظرية 8.3. ليكن (X,Y) متغير عشوائي ذو البعدين معرف على الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$. في حالة وجود العزوم $E(X^pY^q)$ لدينا: $E(X^pY^q)=\dfrac{\partial^{(p+q)}M_{(X,Y)}(t_1,t_2)}{\partial^p t_1\partial^q t_2}$

مثال 8.3. ليكن (X,Y) متغير عشوائي دالة توزيعه الاحتمالية المشتركة معطاة في ل الجدول التالي كما يلي:

Y \ X	-1	0	1
-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	0
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	0

1. إيجاد الدالة المولدة للعزوم $M_{(X,Y)}(t_1,t_2)$ للمتغير العشوائي (X,Y) .

$$M_{(X,Y)}(t_1,t_2)=E\left(e^{t_1X+t_2Y}\right)=\sum_i\sum_j e^{t_1x_i+t_2y_j}\,P_{ij}=\frac{1}{6}e^{-(t_1+t_2)}+\frac{1}{4}e^{-t_1}+\frac{1}{4}e^{-t_2}+\frac{1}{3}$$

2. استنتاج $E(XY)$ و $E(X^2Y)$.

$$E(X^2Y)=\frac{\partial^{(3)}M_{(X,Y)}(t_1,t_2)}{\partial^2 t_1\partial t_2}=-\frac{1}{6}e^{-(t_1+t_2)}\bigg|_{(t_1,t_2)=(0,0)}=-\frac{1}{6}\quad \text{و}\quad E(XY)=\frac{\partial^{(2)}M_{(X,Y)}(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}=\frac{1}{6}e^{-(t_1+t_2)}\bigg|_{(t_1,t_2)=(0,0)}=\frac{1}{6}$$

مثال 9.3. ليكن (X,Y) متغير و $f(x,y)$ دالة كثافته الاحتمالية المشتركة: $f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)} & x>0 \text{ و } y>0 \\ 0 & \text{ع.غ} \end{cases}$

1.إيجاد الدالة المولدة للعزوم $M_{(X,Y)}(t_1,t_2)$ للمتغير العشوائي (X,Y).

$$M_{(X,Y)}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{t_1x+t_2y}\,f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{t_1x+t_2y}\,e^{-(x+y)}dxdy=\int_0^{+\infty}e^{(t_1-1)x}\left[\frac{e^{(t_2-1)y}}{t_2-1}\right]_0^{+\infty}dx=\frac{1}{1-t_2}\left[\frac{e^{(t_1-1)y}}{t_1-1}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{(1-t_1)(1-t_2)}$$

2. استنتاج $E(XY)$ و $E(X^2Y)$.

$$E(X^2Y)=\frac{\partial^{(3)}M_{(X,Y)}(t_1,t_2)}{\partial^2 t_1\partial t_2}==\frac{2}{(1-t_1)^3(1-t_2)^2}\bigg|_{(t_1,t_2)=(0,0)}=2 \text{ و } E(XY)=\frac{\partial^{(2)}M_{(X,Y)}(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}=\frac{1}{(1-t_1)^2(1-t_2)^2}\bigg|_{(t_1,t_2)=(0,0)}=1$$

ملاحظة 12.3. إذا كان $M_{(X,Y)}(t_1,t_2)=M_{(X',Y')}(t_1,t_2)$ من اجل (t_1,t_2) ينتمي إلى مستطيل مفتوح يحتوي على $(0,0)$. فإن المتغيرين العشوائيين ذو البعدين (X,Y) و (X',Y') لهما نفس التوزيع الاحتمالي حيث $M_{(X,Y)}(t_1,t_2)$ و $M_{(X',Y')}(t_1,t_2)$ دالتا مولدتان للعزوم للمتغيرين (X,Y) و (X',Y') .

ملاحظة 13.3. إذا كان المتغيران العشوائيان X و Y مستقلين فإن:

$$\forall\ (t_1,t_2)\ ,\ M_{(X,Y)}(t_1,t_2)=M_X(t_1).M_Y(t_2)$$

حيث $M_{(X,Y)}(t_1,t_2)$ هي الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي (X,Y) و $M_X(t_1)$ و $M_Y(t_2)$ هما دالتا مولدتان للعزوم للمتغيرين العشوائيين X و Y على الترتيب.

6.3. التوزيعات الاحتمالية المتعددة الأبعاد الشهيرة

1.6.3. التوزيع المتعدد الحدود

تعريف: ليكن **P** مجتمع يحتوي على N عنصر من k أنواع مختلفة $A_1,A_2,.....A_k$ بحيث عدد العناصر من النوع A_1 هو N_1 و عدد العناصر من النوع A_2 هو N_2 و..... وعدد العناصر من النوع A_k هو N_k حيث

$$N=N_1+N_2+....+N_k \text{ ، } p_1+p_2+...+p_k=1 \text{ و } \forall i=1,...,k\ ;P(A_i)=p_i=\frac{N_i}{N}.$$

نسحب عشوائيا بالإعادة n عنصر من هذا المجتمع ونعتبر الشعاع $X=(X_1,X_2,.....,X_k)$ بحيث $\forall i=1,...,k$ المتغيرات العشوائية X_i تمثل عدد مرات وقوع الحادث A_i و $X_1+X_2+....+X_k=n$. نقول أن الشعاع العشوائي $X=(X_1,X_2,.....,X_k)$ يتبع توزيع متعدد الحدود بالمعالم $n,p_1,p_2,.....p_k$ ونكتب $\mathrm{N}\sim\mathrm{M}(n,p_1,p_2,.....p_k)$ إذا كانت دالة توزيعه الاحتمالية معرفة كما يلي: $P(X_1=n_1,X_2=n_2,.....,X_k=n_k)=\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times.....\times n_k!}p_1^{n_1}\times p_2^{n_2}\times.....\times p_k^{n_k}$

خواص توزيع متعدد الحدود:

1. المتغيرات العشوائية $X_1,X_2,.....X_k$ غير مستقلة لأن $X_1+X_2+.....+X_k=n$ و $Cov(\mathrm{X_i},\mathrm{X_j})=-n\ p_i\ p_j$.
2. كل متغير حدي $\mathrm{X_i}$ يتبع توزيع ذو الحدين أي: $\forall i=1,...,k\ ;\mathrm{X_i}\sim B(n,p_i)$.
3. المتغير الشرطي $\mathrm{X_j}/\mathrm{X_i}=n_i$ يتبع توزيع ذو الحدين $B\left(n-n_j,\frac{p_j}{1-p_i}\right)$.

ملاحظة 14.3. بنفس المعطيات السابقة إذ كان السحب بدون إعادة فإن الشعاع $X=(X_1,X_2,.....,X_k)$ يتبع توزيع فوق الهندسي متعدد الأبعاد بالمعالم $n,N,p_1,p_2,.....p_k$ ونكتب $\mathrm{X}\sim\mathrm{PH}(N,n,p_1,p_2,.....p_k)$ و دالة توزيعه الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$P(X_1=n_1, X_2=n_2,.....X_k=n_k)=\frac{C_{N_1}^{n_1}\times C_{N_2}^{n_2}\times....\times C_{N_k}^{n_k}}{C_N^n}$$

مثال 10.3. يحتوي كيس على 7 كريات حمراء و 3 كريات بيضاء وكرية سوداء. نسحب بالإعادة 3 كريات من هذا الصندوق.

حساب احتمال الحصول على كرايتين حمراء وكرية بيضاء:

$$P(N_1=2, N_2=1,.N_3=0)=\frac{3!}{2!\times 1!\times 0!}\left(\frac{7}{11}\right)^2\times\left(\frac{3}{11}\right)\times\left(\frac{1}{11}\right)=\frac{441}{1331}=0{,}33$$

مثال 11.3. نرمي قطعة نرد متزنة 9 مرات.

حساب احتمال وقوع الحادث {ظهور الوجه "1" ثلاثة مرات، ظهور الوجه "2"و"3" مرتين و ظهور الوجه "4"و"5"مرة واحدة وعدم ظهور الوجه"6"}:

ليكن الحادث $A_i=$ {ظهور الوجه " i "}، $\forall i, P(A_i)=\frac{1}{6}$

$$P(N_1=3, N_2=2,.N_3=2, N_4=1, N_5=1,.N_6=0)=\frac{9!}{3!\times 2!\times 2!\times 1!\times 1!\times 0!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{1}{6}\right)^1\times\left(\frac{1}{6}\right)^1\times\left(\frac{1}{6}\right)^0=0{,}0015$$

2.6.3. التوزيع الطبيعي المتعدد الأبعاد

ليكن الشعاع العشوائي $X=(X_1, X_2,.....,X_k)$ و Σ مصفوفة التباين و التباين المزدوج بحيث Σ مصفوفة معرفة موجبة متناظرة من الرتبة k قابلة للقلب $(\det\Sigma\neq 0)$ و $\mu=(\mu_1,\mu_2,.....,\mu_k)$. نقول أن X يتبع التوزيع الطبيعي ذو k بعد بالمعلمتين μ و Σ و نكتب: $X\sim N(\mu,\Sigma)$ إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$\forall X=(x_1,x_2,.....,x_k)^T\in R^k\ ;\ f(x_1,x_2,.....,x_k)=\frac{1}{(2\pi)^{k/2}(\det\Sigma)^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}(X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu)\right)$$

حيث:

$$\mu=\begin{pmatrix}\mu_1=E(X_1)\\ \mu_2=E(X_2)\\ .\\ .\\ \mu_k=E(X_k)\end{pmatrix}\quad \text{و}\quad \Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \mathrm{Cov}(X_1,X_2) & . & . & \mathrm{Cov}(X_1,X_k)\\ \mathrm{Cov}(X_2,X_1) & \sigma_2^2 & & & \mathrm{Cov}(X_2,X_k)\\ . & & & & \\ . & & & & \\ \mathrm{Cov}(X_k,X_1) & \mathrm{Cov}(X_k,X_2) & . & . & \sigma_k^2\end{pmatrix}$$

خواص التوزيع الطبيعي ذو k بعد

1. المتغيرات الحدية X_i تتبع التوزيع الطبيعي وحيد البعد أي: $\forall i=1,...,k\ ;X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i)$.
2. المتغيرات الشرطية $X_i/X_j=x_j$ تتبع التوزيع الطبيعي وحيد البعد أي: $\forall i=1,...,k\ ;i\neq j$.
3. يكون المتغيران العشوائيان الحدين X_i و X_j للشعاع العشوائي الطبيعي مستقلين إذا وفقط إذا كان معامل الارتباط الخطي بين X_i و X_j معدوم.

مثال 12.3. التوزيع الطبيعي ذو البعدين $(k=2)$

$$\mu=\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}\text{ ، }\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \mathrm{Cov}(X_1,X_2)\\ \mathrm{Cov}(X_2,X_1) & \sigma_2^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & r\sigma_1\sigma_2\\ r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}\text{ و }r=\frac{\mathrm{Cov}(X_1,X_2)}{\sigma_1\sigma_2)}\text{ ، }\det\Sigma=\sigma_1^2\,\sigma_2^2\,(1-r^2)$$

و

$$\Sigma^{-1}=\frac{1}{1-r^2}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sigma_1^2} & \frac{-r}{\sigma_1\sigma_2}\\ \frac{-r}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2}\end{pmatrix}$$

$$\forall(x_1,x_2)\in R^2\ ;\ f(x_1,x_2)=\frac{1}{(2\pi)\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2r\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right)$$

إذا كان $(X_1,X_2)\sim N(\mu,\Sigma)$ ، $\mu=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ و $\Sigma=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}$ لدينا: $\mu_1=0,\quad \mu_2=1,\quad \sigma_1=1,\quad \sigma_2=2,\quad \mathrm{Cov}(X_1,X_2)=0$

$$\forall(x_1,x_2)\in R^2\ ;\ f(x_1,x_2)=\frac{1}{(4\pi)}\exp\left(-\frac{1}{2}\left[x_1^2+\left(\frac{x_2-1}{2}\right)^2\right]\right)=\frac{1}{(4\pi)}\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{4x_1^2+x_2^2-2x_2+1}{4}\right]\right)$$

المتغيرات الحدية لها توزيعات طبيعية وحيدة البعد: $X_1\sim N(\mu_1,\sigma_1)$ و $X_2\sim N(\mu_2,\sigma_2)$

المتغيرات الشرطية لها توزيعات طبيعية وحيدة البعد: $X_1/_{X_2=x_2}\sim N\left(\mu_1+r\sigma_1\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right),(1-r^2)\sigma_1^2\right)$ و

$X_2/_{X_1=x_1}\sim N\left(\mu_2+r\sigma_2\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right),(1-r^2)\sigma_2^2\right)$

ملاحظة 15.3. يكون المتغيران العشوائيان الحدين X_1 و X_2 مستقلين إذا وفقط إذا كان معامل الارتباط الخطي $r_{(X_1,X_2)}$ بين X_1 و X_2 معدوم.

4. دوال لمتغيرات عشوائية و توزيعاتها

1.4. دوال لمتغيرات عشوائية وحيدة البعد

1.1.4. تعريف دالة لمتغير عشوائي

ليكن $(S,\Im,P)$ الفضاء الاحتمالي المرفق للتجربة العشوائية ξ و X متغير عشوائي معرف على $(S,\Im)$ يأخذ قيمه في المجموعة R_X. نعتبر المتغير العشوائي $Y=\varphi(X)$ و R_Y مجموعة قيمه حيث φ هو تطبيق من R نحو R.

$$\begin{aligned} S &\to R \to R \\ s &\mapsto X(s)\mapsto \varphi(X(s)) \end{aligned}$$

ملاحظة 1.4. عدد عناصر المجموعة R_Y يساوي على الأكثر عدد عناصر المجموعة R_X.

◦ إذا كانت المجموعة R_X منتهية أو غير منتهية و قابلة للعد فإن المجموعة R_Y تكون منتهية أو غير منتهية و قابلة للعد.

◦ إذا كانت المجموعة R_X غير منتهية و غير قابلة للعد فالمجموعة R_Y يمكنها أن تكون منتهية أو غير منتهية و قابلة للعد أو غير منتهية و غير قابلة للعد.

2.1.4. دالة لمتغير عشوائي منفصل

ليكن X متغير عشوائي منفصل و R_X مجموعة قيمه بحيث R_X منتهية أو غير منتهية وقابلة للعد فإن المجموعة $R_Y=\varphi(R_X)$ تكون منتهية أو غير منتهية و قابلة للعد و $Y=\varphi(X)$ يكون متغيرا عشوائيا منفصلا بحيث:

$$\forall y\in R_Y\ ,\quad P(Y=y)=P[\varphi(X)=y]\ =\sum_{x\in R_X\ /\ y=\varphi(x)}P(X=x)$$

مثال 1.4. ليكن X متغير عشوائي منفصل بحيث: $\forall x\in R_X=\{-2,-1,0,1,2,3\},\quad P(X=x)=\frac{1}{6}$

- إيجاد توزيع $Y=X^2$ و $Z=|X|$.

$$\forall y\in R_Y=\{0,1,4,9\},\quad P(Y=y)=\sum_{x\in R_X\ /\ y=\varphi(x)}P(X=x)$$

y	0	1	4	9
$P(Y=y)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\forall z\in R_Z=\{0,1,2,3\},\quad P(Z=z)=\sum_{x\in R_X\ /\ z=\varphi(x)}P(X=x)$$

z	0	1	2	3
$P(Z=z)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

مثال 2.4. ليكن X متغير عشوائي منفصل بحيث: $\forall x\in R_X=\{1,2,....,n,...\},\quad P(X=x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

إيجاد توزيع Y بحيث: Y يأخذ القيمة 1 إذا كان X عدد زوجي و يأخذ القيمة (-1) إذا كان X عدد فردي.

$$\forall y\in R_Y=\{-1,1\},\quad P(Y=y)=\sum_{x\in R_X\ /\ y=\varphi(x)}P(X=x)$$

$$P(Y=1)=\sum_{k=1}^{+\infty}P(X=2k)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}=\frac{1}{4}\times\frac{4}{3}=\frac{1}{3}$$

$$P(Y=-1)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=2k+1)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}=\frac{1}{3}\ =\frac{2}{3}$$

3.1.4. دالة لمتغير عشوائي مستمر

ليكن X متغير عشوائي مستمر معرف على الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$، دالة كثافته الاحتمالية $f(.)$ و φ تطبيقا من R نحو R فإن المتغير العشوائي $Y=\varphi(X)$ يمكنه أن يكون متغيرا عشوائيا منفصلا أو مستمرا.

- إذا كان Y متغير عشوائي منفصل لدينا:

$$\forall y\in R_Y\subset\varphi(R_X),\quad P(Y=y)=\int_{\{x/\varphi(x)=y\}}f(x)dx$$

- إذا كان Y متغير عشوائي مستمر لدينا:

نظرية 1.4. ليكن X متغير عشوائي مستمر، $f(.)$ دالة كثافته الاحتمالية و φ دالة رتيبة تماما، مستمرة وقابلة لاشتقاق فإن دالة الكثافة الاحتمالية $\mathrm{g}(.)$ للمتغير العشوائي $Y=\varphi(X)$ معطاة كما يلي:

$$\forall y\in R_Y,\ \ \mathrm{g}(y)=f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|=f\left(\varphi^{-1}(y)\right)\left|\frac{d\left(\varphi^{-1}(y)\right)}{dy}\right|$$

البرهان: البرهان: لتكن $G(.)$ دالة التوزيع التراكمي لـ Y .

إذا كانت $\varphi(.)$ متزايدة تماما أي تقبل دالة عكسية وحيدة $\varphi^{-1}(.)$ و $\varphi^{-1}(.)$ متزايدة لدينا:

$$\mathrm{G(y)=P(Y\le y)=P(\varphi(X)\le y)=P}(X\le\varphi^{-1}(\mathrm{y}))=F\left(\varphi^{-1}(\mathrm{y})\right)$$

$$\mathrm{g(y)=G'(y)}=\left(F\left(\varphi^{-1}(\mathrm{y})\right)\right)'=F'\left(\varphi^{-1}(\mathrm{y})\right)\left(\varphi^{-1}(\mathrm{y})\right)'=\frac{dF\left(\varphi^{-1}(\mathrm{y})\right)}{d\varphi^{-1}(\mathrm{y})}\cdot\frac{d\varphi^{-1}(\mathrm{y})}{dy}=\frac{dF(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=f(x)\cdot\frac{dx}{dy}\qquad(1)$$

إذا كانت $\varphi(.)$ متناقصة تماما أي تقبل دالة عكسية وحيدة $\varphi^{-1}(.)$ و $\varphi^{-1}(.)$ متناقصة لدينا:

$$G(y)=P(Y\le y)=P(\varphi(X)\le y)=P(X\ge\varphi^{-1}(y))=1-P(X\le\varphi^{-1}(y))=1-F\left(\varphi^{-1}(y)\right)$$

$$g(y)=G'(y)=\left(1-F\left(\varphi^{-1}(y)\right)\right)'=-F'\left(\varphi^{-1}(y)\right)\left(\varphi^{-1}(y)\right)'=-\frac{dF\left(\varphi^{-1}(y)\right)}{d\varphi^{-1}(y)}\cdot\frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy}=-\frac{dF(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=-f(x)\cdot\frac{dx}{dy}\qquad(2)$$

من العلاقتين (1) و (2) نستنتج أن: $g(y)=f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|$

ملاحظة 2.4. إذا كان X متغير عشوائي مستمر و $Y=\varphi(X)$ متغير عشوائي مستمر، لإيجاد دالة الكثافة الاحتمالية $g(y)$ للمتغير العشوائي Y يمكننا إتباع المراحل الآتية:

1. إيجاد دالة التوزيع التراكمي $G(y)$ للمتغير العشوائي Y.
2. استنتاج دالة الكثافة الاحتمالية $g(y)=G'(y)$ للمتغير العشوائي Y.
3. تحديد قيم R_Y التي تجعل من $g(y)$ فعلا دالة كثافته احتمالية.

مثال 3.4. ليكن X متغير عشوائي مستمر بحيث $X\sim\xi(2)$ و $Y=\varphi(X)=\begin{cases}1 & X\ge 0\\ -1 & X<0\end{cases}$

إيجاد توزيع Y. $Y=\varphi(X)$ متغير عشوائي منفصل و $R_Y=\{-1,1\}$ بحيث:

$P(Y=-1)=P(X<0)=\int^{0} f(x)\,dx=0$ و $P(Y=1)=P(X\ge 0)==\int^{+\infty} 2e^{-2x}dx=-e^{-2x}\Big|^{+\infty}=1$

مثال 4.1. ليكن X متغير عشوائي مستمر دالة كثافته الاحتمالية معطاة كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & x\in]-1,1[\end{cases}$$

إيجاد توزيع $Y=3X-2$.

$y=3x-2\Rightarrow x=\frac{y+2}{3}$ و $y=\varphi(x)=3x-2\quad,\varphi''(x)=3$ ،

$$g(y)=\begin{cases}\frac{1}{6} & x\in]-1,5[\end{cases}$$

نظرية 4.2. ليكن X متغير عشوائي مستمر، $f(.)$ دالة كثافته الاحتمالية و φ دالة قابلة لاشتقاق على R_X و $\varphi'(x)\neq 0$ ماعدا عند عدد منته من القيم فإن دالة الكثافة $g(.)$ للمتغير العشوائي $Y=\varphi(X)$ معطاة كما يلي:

$$\forall y\in R_Y,\quad g(y)=\sum^{k} f(x_i)\left|\frac{dx_i}{}\right|$$

حيث k يمثل عدد حلول المعادلة $y=\varphi(x)$

مثال 5.4. ليكن X متغير عشوائي مستمر بحيث $X\sim N(0,1)$. إيجاد توزيع $Y=X^2$.

$y=\varphi(x)=x^2\Rightarrow(x_1=\sqrt{y})\vee(x_2=-\sqrt{y})$ ،

$$\forall y\in R_Y,\quad g(y)=\sum_{i=1}^{2} f(x_i)\left|\frac{dx_i}{dy}\right|=f(x_1)\left|\frac{dx_1}{dy}\right|+f(x_2)\left|\frac{dx_2}{dy}\right|=\frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f(\sqrt{y})+f(-\sqrt{y})\right)$$

$$g(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}y} & y>0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad Y\sim\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\chi_1^2$$

2.4. دوال لمتغيرات عشوائية ذات البعدين

2.4.1. تعريف دالة لمتغير عشوائي ذو البعدين

ليكن (X_1,X_2) متغير عشوائي ذو البعدين معرف على الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$ و $R_{(X_1,X_2)}$ مجموعة قيمه. نعتبر الشعاع العشوائي $Y=\varphi(X_1,X_2)$ و R_Y مجموعة قيمه حيث φ تطبيق من R^2 نحو R^p $(p\in\{1,2\})$.

$$\begin{aligned}\varphi:\quad & R^2 \to R^p\\ & (X_1,X_2)\to\varphi(X_1,X_2)=\left(\varphi_1(X_1,X_2),\varphi_2(X_1,X_2)\right)\end{aligned}$$

$\varphi:\ R^2\to R^2$ ، $\varphi:\ R^2\to R$, $(X_1,X_2)\to\varphi(X_1,X_2)=\min(X_1,X_2)$ ، $\varphi:\ R^2\to R$, $(X_1,X_2)\to\varphi(X_1,X_2)=X_1+X_2$

2.2.4. دالة لمتغير عشوائي ذو البعدين منفصل

ليكن (X_1, X_2) متغير عشوائي ذو البعدين منفصل و $R_{(X_1,X_2)}$ مجموعة قيمه فإن المتغير العشوائي $Y = \varphi(X_1, X_2)$ متغير عشوائي منفصل بحيث:

$$\forall y \in R_Y = \varphi(R_{(X_1,X_2)}),\quad P(Y = y) = \sum \qquad \sum P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$$

مثال 6.4. ليكن (X_1, X_2) زوج عشوائي دالة توزيعه الاحتمالية المشتركة معطاة في الجدول التالي:

$X_2 \backslash X_1$	0	1	2
0	1	1	0
1	0	1	1

إيجاد توزيع $Y = \max(X_1, X_2)$:

y	0	1	2	Σ
$P(Y = y)$	1	1	1	1

مثال 7.4. ليكن (X_1, X_2) متغير عشوائي دالة توزيعه الاحتمالية المشتركة معطاة كما يلي:

$X_2 \backslash X_1$	-1	0	1
-1	1	1	0
0	1	1	0

إيجاد توزيع $Y = (Y_1, Y_2) = (X_1^2 - 1,\ X_2^2 + 2)$.

التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغير (Y_1, Y_2) معطى في الجدول التالي:

$Y_2 \backslash Y_1$	-1	0
2	1	1
3	1	1

$$\forall\ (y_1, y_2) \in R_{Y_1} \times R_{Y_2} = \{-1,0\} \times \{2,3\},\ P(Y_1 = -1, Y_2 = 2) = P(X_1^2 = 0, X_2^2 = 0) = P(X_1 = 0, X_2 = 0) = \frac{1}{3}$$

3.2.4. دالة لمتغير عشوائي ذو البعدين مستمر

ليكن (X_1, X_2) متغير عشوائي ذو البعدين مستمر، $f(.,.)$ دالة كثافته الاحتمالية المشتركة و φ تطبيق من R^2 نحو R^P $(p \in \{1,2\})$. نعتبر المتغير العشوائي $Y = \varphi(X_1, X_2)$.

- إذا كان Y متغير عشوائي منفصل لدينا:

$$\forall y \in R_Y \subset \varphi(R_{(X_1,X_2)}),\quad P(Y = y) = \iint f(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2$$

- إذا كان Y متغير عشوائي مستمر لدينا:

نظرية 3.4. ليكن (X_1, X_2) متغير عشوائي ذو البعدين مستمر، $f(.,.)$ دالة كثافته الاحتمالية المشتركة و φ تطبيق من R^2 نحو R^2. نعتبر المتغير العشوائي $(Y_1, Y_2) = \varphi(X_1, X_2)$ بحيث: $Y_1 = \varphi_1(X_1, X_2)$ و $Y_2 = \varphi_2(X_1, X_2)$ نفترض أن كل من φ_1 و φ_2 لهما حلا وحيدا بحيث: $x_1 = G_1(y_1, y_2)$ و $x_2 = G_2(y_1, y_2)$ و أن المشتقات الجزئية $\frac{\partial x_1}{\partial y_1}$، $\frac{\partial x_1}{\partial y_2}$، $\frac{\partial x_2}{\partial y_1}$، $\frac{\partial x_2}{\partial y_2}$ معرفة و مستمرة فإن دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة $g(.,.)$ للشعاع العشوائي (Y_1, Y_2) معطاة كما يلي:

$$\forall (y_1, y_2) \in R_{(Y_1,Y_2)} = \varphi(R_{(X_1,X_2)}),\quad g(y_1, y_2) = f(x_1, x_2)\left|J^{-1}_{(x_1,x_2)}\right|$$

بحيث: $J^{-1}_{(x_1,x_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$

حيث J_{φ}^{-1} هو محدد مصفوفة جاكوبي.

مثال 8.4. ليكن (X_1, X_2) متغير عشوائي ذو البعدين مستمر،دالة كثافته الاحتمالية المشتركة معطاة كما يلي:

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}4x_1.x_2 & 0<x_1<1 \text{ و } 0<x_2<1\\ 0 & \text{ع ع}\end{cases}$$

إيجاد توزيع (Y_1,Y_2) بحيث:

$$(Y_1,Y_2)=\varphi(X_1,X_2)=\begin{cases}(0,0) & 0<x_1<\frac{1}{2} \text{ و } 0<x_2<\frac{1}{2}\\ (0,1) & 0<x_1<\frac{1}{2} \text{ و } \frac{1}{2}<x_2<1\\ \ldots\end{cases}$$

$$\forall (y_1,y_2)\in R_{(Y_1,Y_2)}=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\},\quad P(Y_1=y_1,Y_2=y_2)=\iint_{\{(x_1,x_2)/\varphi(x_1,x_2)=(y_1,y_2)\}} f(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

$$P(Y_1=0,Y_2=0)=\int_0^{0,5}\int_0^{0,5}4x_1x_2dx_1dx_2=\frac{1}{16},\quad P(Y_1=0,Y_2=1)=\int_0^{0,5}\int_0^{1}4x_1x_2dx_1dx_2=\frac{3}{16}$$

$$P(Y_1=1,Y_2=0)=\int_{0,5}^{1}\int_0^{0,5}4x_1x_2dx_1dx_2=\frac{3}{16},\quad P(Y_1=1,Y_2=1)=\int_{0,5}^{1}\int_{0,5}^{1}4x_1x_2dx_1dx_2=\frac{9}{16}$$

مثال 9.4. ليكن X_1 و X_2 متغيران عشوائيان مستقلان بحيث: $\forall i=1,2\ ;X_i \sim U([0,1])$

إيجاد توزيع $Y=(Y_1,Y_2)=\left(X_1X_2,\ \frac{X_1}{X_2}\right)$.

$$g(y_1,y_2)=f(x_1,x_2)\left|J_{\varphi}^{-1}\right|=f_{X_1}\left(\sqrt{y_1.y_2}\right)f_{X_2}\left(\sqrt{\frac{y_1}{y_2}}\right)\frac{1}{2y_2}=\begin{cases}\frac{1}{2y_2} & 0<y_1.y_2<1 \text{ و } 0<\frac{y_1}{y_2}<1\\ 0 & \text{ع ع}\end{cases}$$

و

$$\begin{cases}y_1=\varphi_1(x_1,x_2)=x_1x_2\\ y_2=\varphi_2(x_1,x_2)=\frac{x_1}{x_2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=G_1(y_1,y_2)=\sqrt{y_1y_2}\\ x_2=G_2(y_1,y_2)=\sqrt{\frac{y_1}{y_2}}\end{cases}$$

$$J_{\varphi}^{-1}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2}\\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\sqrt{y_2}}{2\sqrt{y_1}} & \frac{\sqrt{y_1}}{2\sqrt{y_2}}\\ \ldots & \ldots\end{vmatrix}=\frac{1}{2y_2}$$

استنتاج توزيع Y_1 و Y_2.

$$g_1(y_1)=\int_{y_1}^{\frac{1}{y_1}}\frac{1}{2y_2}dy_2=\begin{cases}-\mathrm{Ln}(y_1) & 0<y_1<1\\ 0 & \text{ع ع}\end{cases}$$

و

$$g_2(y_2)=\begin{cases}\int_0^{y_2}\frac{1}{2y_2}dy_1=\frac{1}{2} & 0<y_2\le 1\\ \int_0^{\frac{1}{y_2}}\frac{1}{2y_2}dy_1=\frac{1}{2y_2^2} & y_2>1\end{cases}$$

3.4. التوزيع الاحتمالي لمجموع متغيران عشوائيان

1.3.4. مجموع متغيران عشوائيان منفصلان

ليكن X_1 و X_2 متغيران عشوائيان منفصلان. التوزيع الاحتمالي للمتغير $S=X_1+X_2$ معرف كما يلي:

$$P(S=s)=\sum_{x_1}P(X_1=x_1,X_2=s-x_1)=\sum_{x_2}P(X_1=s-x_2,X_2=x_2)$$

في حالة ما كان X_1 و X_2 مستقلان لدينا:

$$P(S=s)= \sum P(X_1=x_1)\times P(X_2=s-x_1)= \sum P(X_1=s-x_2)\times P(X_2=x_2)$$

ملاحظة 3.4. إذا كان X_1 و X_2 متغيران عشوائيان منفصلان غير سالبين فإن:

$$R_S=\left\{s\in \mathbb{R}^+ / s=x_1+x_2 ; x_1\in R_{X_1} \wedge x_2\in R_{X_2}\right\}=\left\{0,1,\dots\dots,(\max R_{X_1}+\max R_{X_2})\right\}$$

2.3.4. مجموع متغيران عشوائيان مستمران

نظرية 4.4. ليكن X_1 و X_2 متغيران عشوائيان مستمران و $f(.,.)$ دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغير (X_1,X_2). دالة الكثافة الاحتمالية $g(.)$ للمتغير العشوائي $S=X_1+X_2$ معرفة كما يلي:

$$g_S(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(s-t,t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,s-t)\,dt$$

في حالة ما كان X_1 و X_2 مستقلان لدينا:

$$g_S(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(s-t)\, f_{X_2}(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t)\, f_{X_2}(s-t)dt$$

حيث f_{X_1} و f_{X_2} هما دالتا الكثافة الحدية للمتغيرين العشوائيين X_1 و X_2 على التوالي.

البرهان:نعتبر المتغير العشوائي (S,T) بحيث: $S=X_1+X_2$ و $T=X_2$.

دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة $g(.,.)$ لـ (S,T) معطاة كما يلي: $g(s,t)=f(x_1,x_2)\left|J^{-1}_{(x_1,x_2)}\right|=f(s-t,t).1$

بحيث: $$J^{-1}_{(x_1,x_2)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_1}{\partial t}\\ \frac{\partial x_2}{\partial s} & \frac{\partial x_2}{\partial t}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1$$

ومنه دالة الكثافة الاحتمالية الحدية $g_S(s)$ لـ S هي: $g_S(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(s-t,t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(s-t)\, f_{X_2}(t)dt$

مثال 10.4. $\mathcal{E}$ = {رمي قطعتي نرد متزنة}. ليكن X_1 و X_2 متغيران عشوائيان معرفان كما يلي:
X_1 = { النتيجة العددية للنرد الأول} و X_2 = { النتيجة العددية للنرد الثاني}.

إيجاد توزيع $S=X_1+X_2$.

$$\varphi:\ R^2 \to R$$

$$\forall s\in R_S=\varphi\left(R_{(X_1,X_2)}\right)=\{2,3,\dots\dots,12\}, P(S=s)=P(X_1+X_2=s)=\sum_{x_1\in R_{X_1}/ s=x_1+x_2} P(X_1=x_1, X_2=s-x_1)=\begin{cases}\frac{s-1}{36} & s=2,3,..,7\\ \frac{13-s}{36} & s=7,8,..,12\end{cases}$$

بما أن X_1 و X_2 مستقلين لدينا:

$$\forall s\in\{2,3,\dots\dots,12\}, P(S=s)= \sum P(X_1=x_1).P(X_2=s-x_1)= \sum \frac{1}{6}.\frac{1}{6} =\frac{1}{36}\sum 1 = \begin{cases}\frac{s-1}{36} & s=2,3,..,7\end{cases}$$

مثال 11.4. ليكن X_1 و X_2 متغيران عشوائيان مستمران مستقلان بحيث: $\forall i=1,2\ ; X_i \sim U(]0,1[)$

إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية $g(.)$ للمتغير العشوائي $S=X_1+X_2$.

$$g_S(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(s-t,t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(s-t)\, f_{X_2}(t)dt$$

$$g_S(s)=\begin{cases} s & 0<s\le 1\\ 2-s & 1<s<2\end{cases}$$

4.4. مفهوم الاستقرار حسب الجمع وحسب المزج الخطي

1.4.4. تعريف لاستقرار

ليكن X_1 و X_2 متغيران عشوائيان معرفان على نفس الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$. نقول أن التوزيع $\mathscr{D}$ مستقر بالنسبة لعملية الجمع (بالنسبة لعملية المزج الخطي) إذا و فقط تحقق ما يلي:

$$X_1 \sim \mathscr{D} \text{ و } X_2 \sim \mathscr{D} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim \mathscr{D} \quad (\forall a_1 \in R, a_2 \in R\ ;\ a_1X_1 + a_2X_2 \sim \mathscr{D})$$

2.4.4. استقرار بعض التوزيعات الاحتمالية الشهيرة

نظرية 5.4 .(استقرار توزيع ذو الحدين بالنسبة للجمع)

ليكن X_1 و X_2 متغيران عشوائيان **مستقلان** بحيث: $X_1 \sim B(n_1,p)$ و $X_2 \sim B(n_2,p)$ فإن :

$$X_1 + X_2 \sim B(n_1+n_2,p)$$

البرهان:

$$\forall s \in R_S = \{0,1,\ldots,n_1+n_2\},\ P(X_1+X_2=s)=\sum_{x_1=0}^{s}P(X_1=x_1, X_2=s-x_1)=\sum_{x_1=0}^{s}P(X_1=x_1)\ P(X_2=s-x_1)$$

$$\forall s \in R_S,\ P(X_1+X_2=s)=\sum_{x_1=0}^{s}C_{n_1}^{x_1}p^{x_1}(1-p)^{n_1-x_1}C_{n_2}^{s-x_1}p^{s-x_1}(1-p)^{n_2-(s-x_1)}=p^s(1-p)^{n_1+n_2-s}\sum_{x_1=0}^{s}C_{n_1}^{x_1}C_{n_2}^{s-x_1}=C_{n_1+n_2}^{s}p^s(1-p)^{n_1+n_2-s}$$

بصفة عامة: ليكن X_1 ،....، X_k متغيرات عشوائية **مستقلة** بحيث: $\forall i=1,2,\ldots,n\ ; X_i \sim B(n_i,p)$ فإن :

$$S=\sum^{n}X_i \sim B\left(\sum^{n}n_i,p\right)$$

نظرية 6.4. (استقرار توزيع بواسون بالنسبة للجمع)

ليكن X_1 و X_2 متغيران عشوائيان **مستقلان** بحيث: $X_1 \sim P(\lambda_1)$ و $X_2 \sim P(\lambda_2)$ فإن: $X_1+X_2 \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$.

البرهان:

$$\forall s \in R_S = \{0,1,\ldots,+\infty\},\ P(X_1+X_2=s)=\sum_{x_1=0}^{s}P(X_1=x_1, X_2=s-x_1)=\sum_{x_1=0}^{s}P(X_1=x_1)\ P(X_2=s-x_1)$$

$$\forall s \in R_S,\ P(S=s)=\sum_{x_1=0}^{s}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^{x_1}}{x_1!}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{(s-x_1)}}{(s-x_1)!}=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{x_1=0}^{s}\frac{\lambda_1^{x_1}}{x_1!}\frac{\lambda_2^{(s-x_1)}}{(s-x_1)!}=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{x_1=0}^{s}\frac{C_{x_1}^{s}}{s!}\lambda_1^{x_1}\lambda_2^{(s-x_1)}=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^s}{s!}$$

بصفة عامة: ليكن X_1 ،....، X_k متغيرات عشوائية **مستقلة** بحيث: $\forall i=1,2,\ldots,k\ ; X_i \sim P(\lambda_i)$ فإن:

$$S=\sum^{k}X_i \sim P\left(\sum^{k}\lambda_i\right)$$

نظرية 7.4.(استقرار التوزيع الطبيعي بالنسبة للمزج الخطي)

ليكن X_1 و X_2 متغيران عشوائيان **مستقلان** بحيث: $X_1 \sim N(\mu_1,\sigma_1)$ و $X_2 \sim N(\mu_2,\sigma_2)$ فإن:

$$\forall a_1 \in R,\ a_2 \in R\ :\quad C=a_1X_1+a_2X_2 \sim N\left(a_1\mu_1+a_2\mu_2, \sqrt{a_1^2\sigma_1^2+a_2^2\sigma_2^2}\right)$$

إذا كان $a_1=a_2=1$ لدينا: $S=X_1+X_2 \sim N\left(\mu_1+\mu_2, \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)$

البرهان: لتكن $M_C(.)$ ، $M_{X_1}(.)$ و $M_{X_2}(.)$ دوال مولدة للعزوم للمتغيرات العشوائية C ، X_1 و X_2 على التوالي.

$$\forall t \in R,\ M_C(t)=E\left(e^{tC}\right)=E\left(e^{t(a_1X_1+a_2X_2)}\right)=E\left(e^{ta_1X_1}.e^{ta_2X_2}\right)=E\left(e^{ta_1X_1}\right).E\left(e^{ta_2X_2}\right)=M_{X_1}(ta_1).M_{X_2}(ta_2)$$

$$\forall t\in R,\ M_C(t)=e^{ta_1\mu_1+\frac{1}{2}t^2a_1^2\sigma_1^2}.e^{ta_2\mu_2+\frac{1}{2}t^2a_2^2\sigma_2^2}=e^{t(a_1\mu_1+a_2\mu_2)+\frac{1}{2}t^2(a_1^2\sigma_1^2+a_2^2\sigma_2^2)}$$

بصفة عامة: ليكن X_1 ،....، X_k متغيرات عشوائية مستقلة بحيث: $\forall i=1,2,...,k; X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i)$ فإن :

$$S=\sum_{i=1}^{k}a_iX_i\sim B\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\mu_i,\sqrt{\sum_{i=1}^{k}a_i^2\sigma_i^2}\right)$$

ملاحظة 4.4. إذا كان المتغيران العشوائيان X_1 و X_2 غير مستقلين بحيث: $X_1\sim N(\mu_1,\sigma_1)$ و $X_2\sim N(\mu_2,\sigma_2)$ فإن:

$$\forall a_1\in R, a_2\in R\ ; C=a_1X_1+a_2X_2\sim N\left(a_1\mu_1+a_2\mu_2,\sqrt{a_1^2\sigma_1^2+2a_1a_2\mathrm{cov}(X_1,X_2)+a_2^2\sigma_2^2}\right)$$

ملاحظة 5.4. إذا كانت المتغيرات العشوائية X_1 ،...، X_k غير مستقلة بحيث: $\forall i=1,2,...,k; X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i)$ فإن:

$$C=\sum_{i=1}^{k}a_iX_i\sim N\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\mu_i,\sqrt{\sum_{i=1}^{k}a_i^2\sigma_i^2+2\sum_{i}^{k}\sum_{j}^{k}a_ia_j\mathrm{cov}(X_i,X_j)}\right)$$

نظرية 8.4. **(استقرار توزيع** $Gamma$ **بالنسبة للجمع)**

ليكن X_1 و X_2 متغيران عشوائيان مستقلان بحيث: $X_1\sim\gamma(r_1,\alpha)$ و $X_2\sim\gamma(r_2,\alpha)$ فإن :

$$S=X_1+X_2\sim\gamma(r_1+r_2,\alpha)$$

البرهان: لتكن $M_S(.)$ ،$M_{X_1}(.)$ و $M_{X_2}(.)$ دوال مولدة للعزوم للمتغيرات العشوائية S ، X_1 و X_2 على التوالي.

$$\forall t\in R,\ M_S(t)=E\left(e^{tS}\right)=E\left(e^{t(X_1+X_2)}\right)=E\left(e^{tX_1}\right).E\left(e^{tX_2}\right)=M_{X_1}(t).M_{X_2}(t)=\left(\frac{\alpha}{\alpha-t}\right)^{r_1}.\left(\frac{\alpha}{\alpha-t}\right)^{r_2}=\left(\frac{\alpha}{\alpha-t}\right)^{r_1+r_2}$$

بصفة عامة: لتكن X_1 ،....، X_k متغيرات عشوائية مستقلة بحيث: $\forall i=1,2,...,k; X_i\sim\gamma(r_i,\alpha)$ فإن :

$$S=\sum_{i=1}^{k}X_i\sim\gamma\left(\sum_{i=1}^{k}r_i,\alpha\right).$$

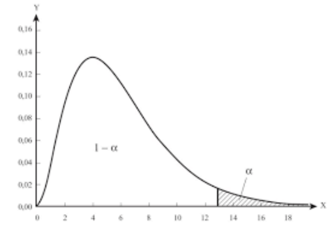
5.4. توزيعات شهيرة لدوال غير خطية

1.5.4. توزيع χ^2 مربع كاي $Khi-deux$

لتكن n متغيرات عشوائية مستقلة Z_1 ،...، Z_n بحيث: $\forall i=1,2,...,n; Z_i\sim N(0,1)$ فإن المتغير العشوائي $W=Z_1^2+Z_2^2+...+Z_n^2=\sum_{i=1}^{n}Z_i^2$ يتبع توزيع **مربع كاي** بدرجة حرية n و نكتب $W\sim\chi^2_{(n)}$.

دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير W معطاة كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}x} & x>0\end{cases}$$



بما أن $\forall i=1,2,...,n\,;Z_i \sim N(0,1)$ فإن $\forall i=1,2,...,n\,;Z_i^2 \sim \gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\chi^2_{(1)}$ والمتغيرات العشوائية Z_1 ،...، Z_n مستقلة فإن المتغيرات العشوائية Z_1^2 ،...، Z_n^2 مستقلة و توزيع $Gamma$ مستقر بالنسبة للجمع و بالتالي لدينا

$$W=Z_1^2+Z_2^2+...+Z_n^2=\sum_{i=1}^{n}Z_i^2 \sim \gamma\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)=\chi^2_{(n)}$$

نظرية 9.4. ليكن W متغير عشوائي بحيث: $W \sim \chi^2_{(n)}$ فإن : $E(W)=n$ و $V(W)=2n$.

البرهان: $W \sim \chi^2_{(n)}=\gamma\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right) \Rightarrow E(W)=\frac{n/2}{1/2}=n \quad ; \quad V(W)=\frac{n/2}{1/4}=2n$

نظرية 10.4. لتكن W_1، W_2، ...، W_k k متغيرات عشوائية مستقلة بحيث: $\forall i=1,2,...,k\,;W_i \sim \chi^2_{(n_i)}$ فإن :

$$W=W_{n_1}+W_{n_2}+...+W_{n_k}=\sum_{i=1}^{k}W_{n_i} \sim \chi^2_{(n_1+n_2+...+n_k)}$$

البرهان: $\forall i=1,2,...,k\,;W_i \sim \chi^2_{(n_i)}=\gamma\left(\frac{n_i}{2},\frac{1}{2}\right) \Rightarrow W_{n_1}+W_{n_2}+...+W_{n_k} \sim \gamma\left(\frac{n_1+n_2+...n_k}{2},\frac{1}{2}\right)=\chi^2_{(n_1+n_2+...n_k)}$

نظرية 11.4. لتكن X_1، X_2، ...، X_n n متغيرات عشوائية مستقلة بحيث: $\forall i=1,2,...,n\,;X_i \sim N(\mu_i,\sigma_i)$ فإن :

$$W=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2 \sim \chi^2_{(n)}$$

البرهان: $\forall i=1,2,...,n\,;X_i \sim N(\mu_i,\sigma_i) \Rightarrow \frac{X_i-\mu_i}{\sigma_i} \sim N(0,1) \Rightarrow \left(\frac{X_i-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2 \sim \chi^2_{(1)} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2 \sim \chi^2_{(n)}$

ملاحظة 5.4. لحساب الاحتمالات والأجزاء من الرتبة $1-\alpha$ لتوزيع χ^2 نستعمل الجدول الإحصائي الخاص بتوزيع χ^2 بحيث: $P\left(W>\chi^2_{(n)}(\alpha)\right)=\alpha$ أو $P\left(W\le \chi^2_{(n;1-\alpha)}\right)=1-\alpha$ أي: $\chi^2_{(n;1-\alpha)}=\chi^2_{(n)}(\alpha)$

مثال12.4. إيجاد القيم التالية: $\chi^2_{(10;0,05)}$ ، $\chi^2_{(10;0,01)}$ ، $\chi^2_{(10;0,99)}$ ، $\chi^2_{(10)}(0.05)$ ، $\chi^2_{(20)}(0.9)$ ، $\chi^2_{(10)}(0.025)$

$\chi^2_{(10;0,05)}=3.94$ ، $\chi^2_{(10;0,01)}=2.56$ ، $\chi^2_{(10;0,99)}=23,2$ ، $\chi^2_{(10)}(0.05)=18.3$ ، $\chi^2_{(20)}(0.9)=12.4$ ، $\chi^2_{(10)}(0.025)=20.5$

مثال 13.4. ليكن W متغير عشوائي بحيث: $W \sim \chi^2_{(3)}$.

إيجاد الاحتمالات التالية: $P(0,22\le W\le 6,25)$ و $P(|W|\le 7,8)$.

$P(0{,}22 \le W \le 6{,}25) = P(W \le 6{,}25) - P(W \le 0{,}22) = 0{,}9 - 0{,}025 = 0{,}875$ و $P(|W| \le 7{,}8) = P(W \le 7{,}8) = 0{,}95$.

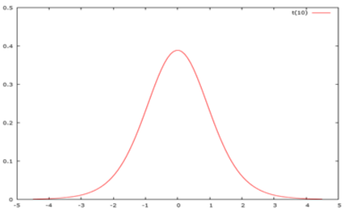
إيجاد قيمة a بحيث: $P(0{,}58 \le W \le a) = 0{,}85$

$$P(0.58 \le W \le a) = 0.85 \Leftrightarrow P(W \le a) - P(W \le 0.58) = 0.85 \Leftrightarrow P(W \le a) = 0.95 \Leftrightarrow a = 7.81$$

2.5.4. توزيع (t) ستيودنت *Student*

تعريف: لتكن ليكن Z و W متغيران عشوائيان **مستقلان** بحيث: $Z \sim N(0{,}1)$ و $W \sim \chi^2_{(n)}$ فإن المتغير العشوائي $T = \dfrac{Z}{\sqrt{\frac{W}{n}}}$ يتبع توزيع **ستيودنت** بدرجة حرية n و نكتب $T \sim t_{(n)}$. دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير T معطاة كما يلي:

$$\forall x \in R, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$



نظرية 12.4. ليكن T متغير عشوائي بحيث: $T \sim t_{(n)}$ فإن: $\forall n,\ E(T) = 0$ و $\forall n > 2,\ V(T) = \frac{n}{\ldots}$.

ملاحظة 6.4. بما أن منحنى توزيع t متناظر بالنسبة للمستقيم 0 لدينا: $P(T \le -t_{(n)}(\alpha)) = P(T > t_{(n)}(\alpha))$

$$\alpha = P(T > t_{(n)}(\alpha)) = P(T \le -t_{(n)}(\alpha)) = P(T > -t_{(n)}(1-\alpha)) \Rightarrow t_{(n)}(\alpha) = -t_{(n)}(1-\alpha)$$

ملاحظة 7.4. لحساب الاحتمالات والأجزاء من الرتبة $1-\alpha$ لتوزيع t نستعمل الجدول الإحصائي الخاص بتوزيع t بحيث: $P(T > t_{(n)}(\alpha)) = \alpha$ أو $P(T \le t_{(n,1-\alpha)}) = 1-\alpha$ أي: $t_{(n,1-\alpha)} = t_{(n)}(\alpha)$

مثال 14.4. إيجاد القيم التالية: $t_{(10)}(0{,}025)$، $t_{(15)}(0.01)$، $t_{(200)}(0.10)$، $t_{(10;0{,}01)}$، $t_{(20;0.95)}$، $t_{(15;0.975)}$

$$t_{(15;0.975)} = 2.131 \text{، } t_{(20;0.95)} = 1.725 \text{، } t_{(10;0.01)} = -2.764 \text{، } t_{(200)}(0.10) = 1.286 \text{، } t_{(15)}(0.01) = 2.602 \text{، } t_{(10)}(0.025) = 2.228$$

مثال 15.4. ليكن W متغير عشوائي بحيث: $T \sim t_{(10)}$.

إيجاد الاحتمالات التالية: $P(0 \le T \le 1{,}37)$ و $P(|T| \le 0.7)$.

$$P(0 \le T \le 1.37) = P(T \le 1.37) - P(T \le 0) = 0.9 - 0.5 = 0.4$$

$$P(|T| \le 0.7) = P(-0.7 \le T \le 0.7) = P(T \le 0.7) - P(T \le -0.7) = 2P(T \le 0.7) - 1 = 2(0.75) - 1 = 0.5$$

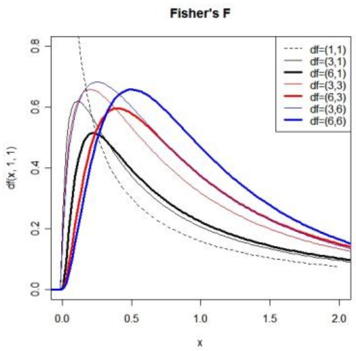
إيجاد قيمة a بحيث: $P(T > a) = 0{,}95$

$$P(T > a) = 0.95 \Leftrightarrow P(T \le -a) = 0.95 \Leftrightarrow a = -1.812$$

3.5.4. توزيع F فيشر *Fisher*

ليكن W_1 و W_2 متغيران عشوائيان مستقلان بحيث: $W_1 \sim \chi^2_{(n_1)}$ و $W_2 \sim \chi^2_{(n_2)}$ فإن المتغير العشوائي $F = \frac{W_1/n_1}{W_2/n_2}$ يتبع توزيع **فيشر** بدرجتي حرية n_1 و n_2 و نكتب $F \sim F(n_1,n_2)$. دالة الكثافة لـ F معطاة كما يلي:

$$\forall x \in R_+^*,\quad f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)x^{\frac{n_1}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)(n_1x+n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}$$



ملاحظة 8.4. لحساب الاحتمالات والأجزاء من الرتبة $1-\alpha$ لتوزيع F نستعمل الجدول الإحصائي الخاص بتوزيع F بحيث: $P\left(F > F^{(\alpha)}_{(n_1,n_2)}\right) = \alpha$ أو $P\left(F \le F_{(n_1,n_2,1-\alpha)}\right) = 1-\alpha$ أي : $F_{(n_1,n_2,1-\alpha)} = F^{(\alpha)}_{(n_1,n_2)}$

ملاحظة 9.4 . ◦ إذا كان $F \sim F(n_1,n_2)$ لدينا: $F(n_1,n_2,\alpha) = \frac{1}{F(n_2,n_1,1-\alpha)}$

◦ إذا كان $T \sim t_{(n)}$ لدينا: $F = T^2 \sim F(1,n)$

مثال15.4 . إيجاد القيم التالية: $F_{(10,5)}(0,05)$ ، $F_{(8,5)}(0,10)$ ، $F_{(4,6)}(0,05)$ ، $F_{(5;10;0,95)}$ ، $F_{(10,10;0,99)}$ ، $F_{(5;5;0,95)}$.

$F_{(10,5)}(0,05) = 4,74$ ، $F_{(8,5)}(0,10) = 3,339$ ، $F_{(4,6)}(0,05) = 4,53$ ، $F_{(5;10;0,95)} = 3,326$ ، $F_{(10,10;0,99)} = 4,849$ ، $F_{(5;5;0,95)} = 5,05$.

مثال 16.4 . ليكن F متغير عشوائي $F \sim F(5.10)$.

◦ إيجاد الاحتمالات التالية: $P(4,24 \le F \le 6,87)$ و $P(F > 3.33)$.

$P(4.24 \le F \le 6.87) = P(F \le 6.87) - P(F \le 4.24) = 0.995 - 0.975 = 0.02$ و $P(F > 3.33) = 0.05$

◦ إيجاد قيمة a و b بحيث $P(F \le a) = 0.99$ و قيمة b بحيث $P(F > b) = 0.95$.

$P(F \le a) = 0.99 \Leftrightarrow a = 5.64$ و $P(F > b) = 0.95 \Leftrightarrow b = 0.2237$.

6.4. توزيع $\min X_i$ و $\max X_i$

1.6.4. توزيع $\min X_i$

نظرية 14.4. لتكن $X_1, X_2, \ldots X_n$ ، n متغيرات عشوائية مستمرة معرفة على الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$ مستقلة و لها نفس التوزيع. لتكن $f(.)$ دالة الكثافة الاحتمالية لـ X_i و $F(.)$ دالة التوزيع التراكمي لـ X_i. دالة الكثافة الاحتمالية $g(.)$ للمتغير العشوائي $Z = \min X_i$ معطاة كما يلي: $g(z) = n.f(z).(1-F(z))^{n-1}$

البرهان:لتكن $G(.)$ دالة التوزيع التراكمي لـ Z .

$$G(z)=P(Z\le z)=P(\min X_i\le z)=1-P(\min X_i>z)=1-P\left(\bigcap_i (X_i>z)\right)=1-\prod_i P(X_i>z)=1-\prod_i\left(1-P(X_i\le z)\right)=1-\prod_i\left(1-F(z)\right)=1-\left(1-F(z)\right)^n$$

$$g(z)=G'(z)=\left(1-\left(1-F(z)\right)^n\right)'=n\ F'(z)\left(1-F(z)\right)^{n-1}=n\ \ f(z)\left(1-F(z)\right)^{n-1}$$

مثال 17.4. لتكن $X_1, X_2,\dots X_n$ n متغيرات عشوائية مستقلة بحيث: $\forall i=1,2,\dots,n;X_{\text{i}}\sim\xi(\theta)$. فإن: $Z=\min_i X_i\sim\xi(\text{n}\theta)$

$$g(z)=n\ \ f(z)\left(1-F(z)\right)^{n-1}=\begin{cases}n\theta e^{-\theta z}.\left(e^{-\theta z}\right)^{n-1} & z>0\end{cases}=\begin{cases}n\theta e^{-\text{n}\theta z} & z>0\end{cases}$$

2.6.4. توزيع $\max X_i$

نظرية 15.4. لتكن n $X_1, X_2,\dots X_n$ متغيرات عشوائية مستمرة معرفة على الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$ مستقلة و لها نفس التوزيع. لتكن $f(.)$ دالة الكثافة الاحتمالية لـ X_i و $F(.)$ دالة التوزيع التراكمي لـ X_i. دالة الكثافة الاحتمالية $h(.)$ للمتغير العشوائي $W=\max X_i$ معطاة كما يلي:

$$h(w)=n.f(w).(F(w))^{n-1}$$

البرهان: لتكن $H(.)$ دالة التوزيع التراكمي لـ W.

$$H(z)=P(W\le w)=P(\max X_i\le w)=P\left(\bigcap_i (X_i\le w)\right)=\prod_i P(X_i\le w)=\prod_i\left(F(w)\right)=\left(F(w)\right)^n$$

$$h(w)=H'(w)=\left(\left(F(zw)\right)^n\right)'=n\ F'(w)\left(F(w)\right)^{n-1}=n\ \ f(w)\left(F(w)\right)^{n-1}$$

مثال 18.4. لتكن $X_1, X_2,\dots X_n$ n متغيرات عشوائية مستقلة بحيث: $\forall i=1,2,\dots,n;X_{\text{i}}\sim U([0,1])$، فإن دالة الكثافة الاحتمالية $h(.)$ للمتغير $W=\max X_i$ هي:

$$h(w)=n\ \ f(w)\left(F(w)\right)^{n-1}=\begin{cases}n\ \ w^{n-1} & 0\le w\le 1\\ 0 & \text{غ.م}\end{cases}$$

5. التصرف التقاربي والتقارب

1.5. تعريف التقارب

1.1.5. التقارب بالاحتمال

لتكن $(X_n)_{n\geq 1}$ متتالية من المتغيرات العشوائية معرفة على الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$ و X متغير عشوائي معرف على نفس الفضاء. نقول أن X_n تقارب بالاحتمال المتغير X ونكتب $X_n \xrightarrow{P} X$ إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad Lim\ P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0 \quad (\forall \varepsilon > 0, \quad Lim\ P(|X_n - X| \leq \varepsilon) = 1)$$

مثال1.5. لتكن $(X_k)_{k\geq 1}$ متتالية من المتغيرات العشوائية المستقلة بحيث:

$\forall k = 1,..,n \ ; \ E(X_k) = 0$ و $\forall k = 1,..,n \ ; \ V(X_k) = 1$. نبين أن : $\overline{X}_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} \xrightarrow{P} 0$

حسب نظرية Tchebytchev لدينا:

$$\forall \varepsilon > 0, P(|\overline{X}_n - 0| > \varepsilon) \leq \frac{1}{?} \quad \Rightarrow \quad Lim\ P(|\overline{X}_n - 0| > \varepsilon) \leq \ Lim\ \frac{1}{?} = 0$$

نظرية 1.5. **(القانون الضعيف للأعداد الكبرى)**

لتكن $\{X_1,..,X_n\}$ متتالية من n متغيرات عشوائية مستقلة لها نفس التوزيع توقعه الرياضي μ و تباينه σ^2 فإن:

$$\overline{X}_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{?} \xrightarrow{P} \mu$$

مثال2.5. لتكن $(X_n)_{n\geq 1}$ متتالية من المتغيرات العشوائية بحيث: $\forall n, X_n \sim B(n,p)$. نبين أن $\frac{X_n}{?} \xrightarrow{P} p$.

حسب نظرية Tchebytchev لدينا: $\forall \varepsilon > 0, \quad P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

2.1.5. التقارب بالتوزيع

لتكن $(X_n)_{n\geq 1}$ متتالية من المتغيرات العشوائية معرفة على الفضاء الاحتمالي $(S,\Im,P)$ و X متغير عشوائي معرف على نفس الفضاء. لتكن $F_n(.)$ دالة التوزيع التراكمي لـ X_n و $F(.)$ دالة التوزيع التراكمي لـ X . نقول أن X_n تقارب بالتوزيع X ونكتب $X_n \xrightarrow{L} X$ إذا وفقط إذا عند كل نقطة استمرار x لـ $F(.)$ تحقق ما يلي:

$$Lim\ F_n(x) = F(x)$$

ملاحظة 1.5. لتكن $M_{X_n}(.)$ الدالة المولدة للعزوم لـ X_n و $M_X(.)$ الدالة المولدة للعزوم لـ X . نقول أن X_n تقارب بالتوزيع المتغير X إذا وفقط إذا تحقق ما يلي: $\forall t, \ \lim_{n\to+\infty} M_{X_n}(t) = M_X(t)$

مثال3.5. لتكن $(X_n)_{n\geq 1}$ متتالية من المتغيرات العشوائية بحيث:

نبين أن : $X_n \xrightarrow{L} X$ حيث $X \sim P(\lambda)$. $X_n \sim B(n,p)\ ,p \to 0\ ,\ n \to +\infty,\ \lambda = np$

لتكن $F_n(.)$ دالة التوزيع التراكمي لـ X_n .

$$\forall x_0\ ,\ F_n(x_0) = P(X_n \le x_0) = \sum_{x=0}^{x_0} P(X_n = x) = \sum_{x=0}^{x_0} C_n^x p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^{x_0} \frac{n!}{x!(n-x)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \sum_{x=0}^{x_0} \frac{n(n-1)...(n-(x+1)).}{x!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$\forall x_0\ ,\ \lim_{n\to+\infty} F_n(x_0) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{x=0}^{x_0} \frac{\lambda^x}{x!}.\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)...\left(1-\frac{(x+1)}{n}\right)\right) = \sum_{x=0}^{x_0} \frac{\lambda^x}{x!} \lim_{n\to+\infty}.\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)...\left(1-\frac{(x+1)}{n}\right)\right) = \sum_{x=0}^{x_0} \frac{\lambda^x}{x!}.e^{-\lambda} = F(x_0)$$

حيث $F(x_0)$ دالة التوزيع التراكمي لـ X .

مثال4.5. لتكن $(Y_n)_{n\ge1}$ متتالية من المتغيرات العشوائية بحيث: $X_n \sim \chi^2_{(n)}$ و $Y_n = \frac{X_n - n}{\sqrt{2n}}$.

نبين أن : $Y_n \xrightarrow{L} Z$ حيث $Z \sim N(0,1)$.

لتكن $M_{X_n}(.)$ الدالة المولدة للعزوم لـ X_n و $M_{Y_n}(.)$ الدالة المولدة للعزوم لـ Y_n

$$M_{Y_n}(t) = E\left(e^{tY_n}\right) = E\left(e^{t\left(\frac{X_n-n}{\sqrt{2n}}\right)}\right) = E\left(e^{\left(\frac{tX_n}{\sqrt{2n}}-\frac{tn}{\sqrt{2n}}\right)}\right) = e^{-t\sqrt{\frac{n}{2}}}\left(e^{\left(\frac{tX_n}{\sqrt{2n}}\right)}\right) = e^{-t\sqrt{\frac{n}{2}}} M_{X_n}\left(\frac{t}{\sqrt{2n}}\right) = e^{-t\sqrt{\frac{n}{2}}}\left(1-\frac{t}{\sqrt{2n}}\right)^{\frac{-n}{2}}$$

$$\forall t < \sqrt{\frac{2}{n}}\ ,\ M_{Y_n}(t) = \left(e^{t\sqrt{\frac{2}{n}}}\left(1-t\sqrt{\frac{2}{n}}\right)\right)^{\frac{-n}{2}} = \left(\left(1+t\sqrt{\frac{2}{n}}+\frac{t^2}{n}\right).\left(1-t\sqrt{\frac{2}{n}}\right)\right)^{\frac{-n}{2}} = \left(1-\frac{t^2}{n}-\frac{t^3}{n}\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^{\frac{-n}{2}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} M_{Y_n}(t) = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{-n}{2}\ln\left(1-\frac{t^2}{n}-\frac{t^3}{n}\sqrt{\frac{2}{n}}\right)} \approx \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{-n}{2}\left(-\frac{t^2}{n}-\frac{t^3}{n}\sqrt{\frac{2}{n}}\right)} = \lim_{n\to+\infty} e^{\left(\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{\sqrt{2n}}\right)} = e^{\frac{t^2}{2}} = M_Z(t)$$

حيث $M_Z(t)$ دالة التوزيع التراكمي لـ Z .

نظرية 2.5. (نظرية النهاية المركزية)

لتكن $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ متتالية من n متغيرات عشوائية مستقلة لها نفس التوزيع توقعه الرياضي μ و تباينه σ^2 و n كبيرة بما فيه الكفاية فإن:

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\left(\overline{X}_n - \mu\right)\sqrt{n}}{\sigma} \xrightarrow{L} N(0,1)$$

البرهان: لتكن $M_{Z_n}(.)$ الدالة المولدة للعزوم لـ Z_n

$$M_{Z_n}(t) = E\left(e^{tZ_n}\right) = E\left(e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right)}\right) = E\left(e^{t\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)}\right) = \prod_{i=1}^{n} E\left(e^{t\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)}\right) = \prod_{i=1}^{n} M_{\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)}(t) = \left(M_{\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)}(t)\right)^n$$

$$M_{Z_n}(t)=E\left(e^{t\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)}\right)^n \approx E\left(1+t\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)+\frac{t^2}{2!}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2\right)^n=\left(1+tE\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)+\frac{t^2}{2!}E\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2\right)^n=\left(1+\frac{t^2}{2n}\right)^n$$

$$E\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)=\frac{E(X_i)-\mu}{\sigma\sqrt{n}}=0 \quad , \quad E\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2=\frac{E(X_i-\mu)^2}{\sigma^2 n}=\frac{\sigma^2}{\sigma^2 n}=\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} M_{Z_n}(t)=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{t^2}{2n}\right)^n=\lim_{n\to+\infty} e^{n\,Ln\left(1+\frac{t^2}{2n}\right)}\approx\lim_{n\to+\infty} e^{n\left(\frac{t^2}{2n}\right)}=e^{\frac{t^2}{2}}=M_Z(t)$$

حيث $M_Z(t)$ دالة التوزيع التراكمي لـ Z.

مثال5.5. نفترض أن الإنتاج اليومي X_i لمصنع مؤسسة ‘‘كندور’’ للتلفزيونات متغير عشوائي توقعه الرياضي μ و تباينه $\sigma^2=100$. نختار بصفة عشوائية 100يوم من أيام السنة. ليكن $S=\sum_{i=1}^{100} X_i$ الإنتاج الكلي و $\bar{X}=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i$ متوسط الإنتاج. نحسب ما يلي: $P(|S-100\mu|\le 196)$

حسب نظرية النهاية المركزية لدينا: $Z=\frac{S-E(S)}{\sqrt{V(S)}}=\frac{S-100\mu}{100}\xrightarrow{L} N(0,1)$

$$P(|S-100\mu|\le 196)=P(|Z|\le 1.96)=P(-1.96\le Z\le 1.96)=2(0.975)-1=0.95$$

2.5. تقريب توزيع ذو الحدين بالتوزيع الطبيعي

نظرية 3.5. لتكن $(X_n)_{n\ge1}$ متتالية من المتغيرات العشوائية بحيث: $\forall n,\ X_n \sim B(n,p) / (n\to+\infty, p\to 0)$. فإن المتغير العشوائي X_n يقارب التوزيع الطبيعي $X_n \approx N(np,\sqrt{np(1-p)})$ و لدينا:

$$Z_n=\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\xrightarrow{L} N(0,1)$$

البرهان: نعتبر المتغيرات العشوائية المستقلة $Y_n,Y_2,...,Y_1$ بحيث: $\forall i,\ Y_i \sim B(p)$ و $X_n=\sum^{n} Y_i \sim B(n,p)$

حسب (نظرية النهاية المركزية) لدينا: $Z_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}Y_i-np}{\sqrt{np(1-p)}}=\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\xrightarrow{L} N(0,1)$

ملاحظة 2.5. كلما كانت n كبيرة بما فيه الكفاية و p صغيرا جدا يكون تقريب التوزيع ذو الحدين بالتوزيع الطبيعي أحسن.في التطبيقات يمكننا استعمال القاعدة العملية الآتية:

لتكن $X_n \sim B(n,p)$ ، $n\to+\infty (n\ge 30)$ ، $np\ge 5$ و $n(1-p)\ge 5$ لدينا: $X_n \approx N(np,\sqrt{np(1-p)})$

لحساب الاحتمالات نستعمل القاعدة التالية: (التصحيح بالاستمرارية)

$$\forall x,\ P_B(X_n=x)\approx P_N\left(x-\frac{1}{2}\le X_n\le x+\frac{1}{2}\right)$$

مثال 6.5. ليكن $X \sim B(n=50, p=0.4)$ ، حساب الاحتمالات الاتية بطريقتين : $P(X=15)$ و $P(X>18)$ و $P(16<X<21)$.

الطريقة1:استعمال جدول التوزيع التراكمي $F(.)$ للتوزيع ذو الحدين

$$P(X=15) = P(14 < X \le 15) = F(15) - F(14) = 0.0995 - 0.0540 = 0.0415$$
$$P(X>18) = P(X \ge 19) = 1 - F(18) = 1 - 0.3356 = 0.6644$$
$$P(16 < X < 21) = P(16 < X \le 20) = F(20) - F(16) = 0.5610 - 0.1561 = 0.4049$$

الطريقة2: استعمال تقريب التوزيع ذو الحدين بالتوزيع الطبيعي

$$np = 50 \times 0,4 = 20 > 5 \;;\; np(1-p) = 50 \times 0,6 = 30 > 5 \quad \Rightarrow \quad X_n \approx N(20, \sqrt{12})$$

$$P(X=15) \approx P(14.5 \le X \le 15.5) = P\left(\frac{14,5-20}{\sqrt{12}} \le Z \le \frac{15,5-20}{\sqrt{12}}\right) = \Phi(-1.58) - \Phi(-1.29) = 0.04 \;;\; Z \sim N(0,1)$$

$$P(X>18) \approx P(X \ge 18.5) = P\left(Z \ge \frac{18,5-20}{\sqrt{12}}\right) = P(Z \ge -0.43) = \Phi(0.43) = 0.6664$$

$$P(16 < X < 21) \approx P(16.5 < X < 20.5) = P(-1.01 < Z < 0.14) = \Phi(0.14) - \Phi(-1.01) = 0.5557 - 0.8438 = 0.3995$$

3.5. تقريب توزيع بواسون بالتوزيع الطبيعي

نظرية 4.5. لتكن $(X_\lambda)_{\lambda>0}$ متتالية من المتغيرات العشوائية بحيث: $(\lambda \to +\infty)/ \; \forall\lambda,\; X_\lambda \sim P(\lambda)$. فإن المتغير العشوائي X_λ يقارب التوزيع الطبيعي $X_\lambda \approx N(\lambda, \sqrt{\lambda})$ و لدينا:

$$Z_\lambda = \frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{L} N(0,1)$$

البرهان: لتكن $M_{X_\lambda}(.)$ الدالة المولدة للعزوم لـ X_λ و: لتكن $M_{Z_\lambda}(.)$ الدالة المولدة للعزوم لـ Z_λ .

$$M_{Z_\lambda}(t) = E\left(e^{tZ_\lambda}\right) = E\left(e^{t\left(\frac{X_\lambda-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)}\right) = E\left(e^{t\frac{X_\lambda}{\sqrt{\lambda}}}.e^{-t\sqrt{\lambda}}\right) = e^{-t\sqrt{\lambda}}E\left(e^{t\frac{X_\lambda}{\sqrt{\lambda}}}\right) = e^{-t\sqrt{\lambda}}M_{X_\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) = e^{-t\sqrt{\lambda}}e^{\lambda\left(e^{\frac{t}{\sqrt{\lambda}}}-1\right)}$$

$$M_{Z_\lambda}(t) \approx e^{-t\sqrt{\lambda}}e^{\lambda\left(1+\frac{t}{\sqrt{\lambda}}+\frac{t^2}{\lambda}-1+\ldots\right)} = e^{-t\sqrt{\lambda}}e^{t\sqrt{\lambda}+\frac{t^2}{2}} = e^{\frac{t^2}{2}} = M_Z(t)$$

حيث $M_Z(t)$ دالة التوزيع التراكمي لـ Z ، $Z \sim N(0,1)$

ملاحظة 3.5. كلما كانت λ كبيرة بما فيه الكفاية يكون تقريب التوزيع ذو الحدين بالتوزيع الطبيعي أحسن. لحساب الاحتمالات نستعمل القاعدة التالية: (التصحيح بالاستمرارية)

$$\forall x,\; P_P(X_n = x) \approx P_N\left(x - \frac{1}{2} \le X_n \le x + \frac{1}{2}\right)$$

مثال7.5. ليكن $X \sim P(18)$ ، احسب بطريقتين $P(X=11)$ ، و $P(X>11)$ و $P(11<X<15)$.

الطريقة1:استعمال جدول التوزيع التراكمي $F(.)$ للتوزيع ذو الحدين

$$P(X=11) = e^{-18}\frac{(18)^{11}}{11!} = 0,025 \;,\quad P(X>11) = 1 - P(X \le 11) = 1 - F(11) = 1 - 0,055 = 0,945$$

$$P(11 < X < 15) = P(11 < X \le 14) = F(14) - F(11) = 0.208 - 0.055 = 0.153$$

الطريقة2: استعمال تقريب توزيع بواسون بالتوزيع الطبيعي: $X_\lambda \approx N(18, \sqrt{18})$

$$P(X=11) \approx P(10.5 \le X \le 11.5) = P(-1.77 \le Z \le -1.53) = 0.0246 \;,\quad P(X>11) = P(X \ge 11.5) = P(Z \ge -1.53) = 0.93699$$

$$P(11 < X < 15) = P(11,5 \le X \le 14,5) = P(-1,53 \le Z \le -0,82) = 0,143$$

تمارين مقترحة

1.1. ليكن $(S,\Im,P)$ فضاء احتمالي بحيث $S=\{a,b,c,d\}$ و $\Im=\{\varnothing,\{a\},\{b,c,d\},S\}$ وليكن التطبيق $X:S\to R$ بحيث: $X(b)=X(c)=0$, $X(d)=1$, $X(a)=-1$. هل X هو متغير عشوائي على الفضاء القابل للاحتمال $(S,\Im)$.

الحل1.1/ $R_X=\{-1,0,1\}$ ، $X^{-1}(0)=\{b,c\}\notin\Im$ ، X ليس متغيرا عشوائيا

2.1. نعتبر التجربة العشوائية ξ بحيث $S=\{s_1,s_2,s_3,s_4,s_5\}$ و X تطبيق معرف كما يلي: $X(s_1)=0,\ X(s_2)=1,\ X(s_3)=X(s_4)=X(s_5)=-1$. هل X متغير عشوائي على $(S,\Im=\text{P(S)})$؟

الحل2.1/ $\forall x\in R_X=\{-1,0,1\},X^{-1}(x)\in\Im$ ، X هو متغير عشوائي على $(S,\Im)$.

3.1. ليكن X متغير عشوائي توزيعه الاحتمالي معطى كما يلي:

x	3	4	5	6
$P(X=x)$	a	a	c	d

1.أوجد القيم a ، c و d بحيث $P(X<5)=\frac{1}{}$ و $P(>5)=\frac{1}{}$.

2.أعط في جدول دالة التوزيع التراكمي $F(x)$ لـ X.

3.احسب $P(X=3.5)$ و $P(1\le X\le 3)$.

4.أوجد الربيع الأول Q_1 ، الوسيط M_e و المنوال M_o لتوزيع X.

5.احسب $E(2-X)$ و $V(2-X)$.

الحل3.1/ .1 $a=\frac{1}{}$ ، $c=\frac{1}{}$ و $d=\frac{1}{2}$ ، .2

X	$]-\infty,3[$	$[3,4[$	$[4,5[$	$[5,6[$	$[6,+\infty[$
$F(x)$	0	$1/6$	$2/6$	$3/6$	1

.3 $P(X=3{,}5)=0$ و $P(4\le X\le 6)=\frac{5}{6}$ .4 $Q_1=4$ ، $M_e=5$ ، $M_o=6$ ، .5 $E(2-X)=-3$ و $V(2-X)=1{,}33$.

4.1. لتكن $f(x)$ دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي X : $f(x)=\begin{cases}k(1-x^2) & x\in]-1,1[\end{cases}$

1.أوجد قيمة k.

2.حدد دالة التوزيع التراكمي $F(x)$ لـ X .

3.احسب $P(X=0)$ و $P\left(\frac{1}{}\le X\le\frac{1}{}\right)$.

4.أوجد المنوال M_o لتوزيع X.

5.احسب $E(3X-1)$ و $V(3X-1)$.

الحل1.4/ .1 $k=\frac{3}{4}$ ، .2 $F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ \frac{3x-x^3+2}{4} & -1<x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$ ،.3 $P(X=0)=0$, $P\left(\frac{1}{4}\le X\le\frac{1}{2}\right)=0{,}16$ ،.4 $M_o=0$ ،

.5 $E(3X-1)=-1$, $V(3X-1)=1{,}8$

5.1. لتكن $f(x)$ دالة معرفة كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{\ } & 0\le x<2\end{cases}$$

1.أوجد قيمة c التي تجعل من $f(x)$ دالة كثافة احتمالية للمتغير العشوائي X .

2. احسب الاحتمالات الآتية: $P\left(\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2}\right)$ و $P(3\le X<5)$.

3. احسب $E(X)$.

4.أوجد المنوال M_o لتوزيع X .

الحل1.5/1. $c=6$ ،2. $P\left(\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2}\right)=0.125$ ، $P(3\le X<5)=0{,}213$ ،3. $E(X)=3{,}25$ ، 4. $M_o=2$.

6.1. ليكن X متغير عشوائي و $f(x)$ معطاة ما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}k\,e^{-(x-2)} & x\ge 2\end{cases}$$

1.أوجد قيمة k التي تجعل $f(x)$ فعلا دالة كثافة احتمالية.

2.أوجد دالة التوزيع التراكمي $F(x)$ لـ X .

3.احسب الاحتمالات الآتية : $P(X=2)$ ، $P(X>4)$ ، $P\left(X>6/_{X>4}\right)$.

4. أوجد الدالة المولدة للعزوم لـ X ثم استنتج $E(X)$.

5.أوجد المنوال M_0 لـ X .

الحل1.6/ 1. $k=1$ ، 2. $F(x)=\begin{cases}1-e^{-(x-2)} & x\ge 2\\ 0 & x<2\end{cases}$ ، 3. $P(X=2)=0$ ، $P(X>4)=0{,}135$ ، $P\left(X>6/_{X>4}\right)=0{,}135$

4. $\forall\ t<1,\ M_X(t)=\frac{e^{2t}}{\ }$ ، $E(X)=3$ ، 5. $M_0=2$.

7.1. مدة حياة مركبة إلكترونية في جهاز هي متغير عشوائي X دالة كثافته الاحتمالية معطاة كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{x^4} & x\ge 1\\ 0 & x<1\end{cases}$$

1.حدد دالة التوزيع التراكمي لمدة حياة هذه المركبة الإلكترونية .

2.ما هو احتمال أن تفوق مدة حياة هذه المركبة الإلكترونية ثلاث سنوات.

3. ما هي المدة المتوسطة لحياة هذه المركبة الإلكترونية ؟

4. احسب الانحراف المعياري لمدة حياة هذه المركبة الإلكترونية.

الحل1.7/ 1. $F(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{x^3} & x\ge 1\\ 0 & x<1\end{cases}$ ، 2. $P(X>3)=\frac{1}{27}$ ، 3. $E(X)=\frac{3}{2}$ ، 4. $\sigma_X=\frac{\sqrt{3}}{2}$

8.1. ليكن X متغير عشوائي دالة توزيعه التراكمية معطاة في الجدول الآتي بحيث: $P(X>3)=0.1$

x	$]-\infty,-2[$	$[-2,0[$	$[0,2[$	$[2,3[$	$[3,4[$	$[4,+\infty[$
$F(x)$	0	0.2	0.5	0.6	$0.6+a$	1

1. أوجد قيمة a.
2. احسب الاحتمالات الآتية: $P(X>2)$ ، $P(X=0)$ و $P(-2<X<3)$.
3. أعط في جدول التوزيع الاحتمالي لـ X. ثم احسب $P(X \geq -2 / X < 2)$.
4. أوجد الوسيط M_e و الربيع الأول Q_1.
5. احسب $E(X)$ و $E(X^2)$ ثم استنتج $V(2X-3)$.

الحل 8.1/ 1. $a=0.3$ ، 2. $P(X>2)=0.4$ ، $P(X=0)=0.3$ و $P(-2<X<3)=0.4$ ، 3.

x	-2	0	2	3	4
$P(x)$	0.2	0.3	0.1	0.3	0.1

، $P(X \geq -2 / X < 2)=1$ ، 4. $M_e=0$ و $Q_1=-2$. 5. $E(X)=1{,}1$ و $E(X^2)=5{,}5$ و $V(2X-3)=17{,}16$.

1.2. ليكن X متغير عشوائي
1. إذا كان $X \sim B(p)$ احسب $E(X^2)$.
2. إذا كان $X \sim B(20,p)$ لأي قيمة p تصبح $E(X)=4$.
3. إذا كان $X \sim H(50.10.15)$ أعط مجموعة تعريف X (R_X) ثم احسب $\forall x \in R_X$, $P(X=x)$.
4. إذا كان $X \sim N(0,1)$ احسب: $P(X \leq 0)$ و $P(-2 \leq X \leq 0)$.
5. إذا كان $X \sim N(\mu=2, \sigma=0{,}4)$ حدد قيمة الربيع الثالث Q_3.

الحل 1.2/ 1. $E(X^2)=p$ ، 2. $p=\frac{1}{5}$ ، 3. $\forall x \in R_X = \{0,1,..,10\}$; $P(X=x)=\frac{C_{15}^{x}C_{35}^{10-x}}{C_{50}^{10}}$ ، 4. $P(X \leq 0)=0{,}5$ ، $P(-2 \leq X \leq 0)=0{,}47725$ ، 5. $Q_3=2{,}27$

2.2. يشارك طالب في امتحان يحتوي على 20 سؤال بحيث لكل سؤال جوابين(جواب صحيح و جواب خاطئ).إذا افترضنا أن الطالب يجيب بطريقة عشوائية على الأسئلة. ما هو احتمال أن يتحصل هذا الطالب على الأقل على 13 أجوبة صحيحة؟

الحل2.2/ $X \sim B\left(20, \frac{1}{2}\right)$ ، $P(X \geq 13) \approx P(X \geq 1{,}34) = 0{,}90988$

3.2. للحصول على رخصة قيادة يتقدم المترشح أمام لجنة للفحص، فقد يجتاز هذا الفحص وقد يفشل. إذا علمت أن احتمال أن يجتاز مترشح الفحص في كل مرة هو 0.7.
1. ما هو احتمال أن يجتاز مترشح ما فحص القيادة في المرة الثالثة ؟
2. ما هو احتمال أن يجتاز مترشح ما فحص القيادة قبل المرة الرابعة ؟

الحل3.2/ 1. $X \sim G(0,\ 7)$ ، $P(X=3)=(0{,}3)^2(0{,}7)=0{,}063$ ، 2. $P(X<4)=\sum_{x=1}^{3}P(X=x)=0{,}063+0{,}21+0{,}7=0{,}973$.

4.2. ليكن X متغيرا عشوائيا يتبع التوزيع الطبيعي $X \sim N(\mu,\sigma)$.
1. إذا $\mu=0$ و $\sigma=1$ بين أن: $P(X \leq -a)=P(X>a)$. ثم احسب $P(0.6<X \leq 0.65)$ و $P(-1.61 \leq X < 0)$.
2. إذا $\mu=-2$ و $\sigma=2$, احسب: $P(X<2)$ و $P(-1<X \leq 1)$.
3. أوجد μ و σ بحيث: $P(X \leq 89)=0.9$ و $P(X<94)=0.95$.

الحل4.2 /1. $P(X \leq -a)=\int_{-\infty}^{-a} f(x)dx=\int_{-\infty}^{-a} f(-x)dx=\int_{a}^{+\infty} f(x)dx=P(X>a)$ ، $P(0{,}6<X \leq 0{,}65)=0{,}0164$ ، $P(-1{,}61 \leq X < 0)=0{,}4463$.
2. $P(X<2)=0{,}97725$ ، $P(-1<X \leq 1)=0.24173$ ، 3. $\mu=76 , \sigma=10.9$.

5.2. حسب الإحصائيات الديمغرافية فإن متوسط عدد الأطفال الذكور في العائلات المتكونة من 5 أطفال هو مقدر بـ $2{,}4$ (طفل). نختار بطريقة عشوائية عائلة واحدة من بين العائلات المتكونة من 5 أطفال. ليكن X متغيرا عشوائيا يمثل عدد الأطفال الذكور في العائلة.

1.ما هو توزيع X ؟

2.ما هو احتمال أن تحتوي العائلة على طفل ذكر واحد؟

3.ما هو احتمال أن تتكون العائلة من أطفال كلهم من نفس الجنس؟

4.ما هو احتمال أن يفوق عدد الذكور في العائلة عدد الإناث؟

الحل5.2/ 1. $X \sim B(5\,;0{,}48)$ ،2. $P(X=1)=0{,}175$ ،3. $P((X=0)\cup(X=5))=0{,}063$ ،4. $P(X\geq 3)=0{,}1925$.

1.3. نرمي قطعتي نرد متزنتين دفعة واحدة. ليكن X و Y متغيران عشوائيان.

$X=$ { النتيجة العددية الأكبر المتحصل عليها} و $Y=$ { النتيجة العددية الأصغر المتحصل عليها}.

1. أوجد التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغير (X,Y).

2. احسب $F(2:2.5)$ و $P(X<3.2:Y\leq 4)$.

3.هل المتغيران X و Y مستقلان؟

الحل1.3/ 1 .نضع $X=\max(R_1,R_2)$ و $Y=\min(R_1,R_2)$ حيث R_1 و R_2 يمثلان النتيجة العددية للنردين على التوالي. $P(X=x_i\,,Y=y_j)=\begin{cases}0 & x_i<y_j\\ \frac{1}{36} & x_i=y_j\\ \frac{2}{36} & x_i>y_j\end{cases}$ ، 2. $F(2\,;2{,}5)=\frac{1}{9}$ ، $P(X<3{,}2\,;Y\leq 4)=\frac{1}{4}$ ،3. X و Y غير مستقلين.

2.3. نسحب 3 كريات من كيس يحتوي على 3 كريات بيضاء، 4 كريات خضراء و 5 كريات زرقاء. ليكن X و Y متغيران عشوائيان.

$X=$ { عدد الكريات البيضاء المسحوبة } و $Y=$ { عدد الكريات الخضراء المسحوبة }.

1. أوجد التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغير (X,Y).

2. حدد التوزيع الاحتمالي الحدي لـ X.

3.حدد التوزيع الاحتمالي الشرطي لـ Y علما $X=0$.

4.هل المتغيران X و Y مستقلان؟

الحل3.2/ 1. $P(X=x,Y=y)=\frac{C_x^3C_y^4C_{3-x-y}^5}{C_3^{12}}$; $\forall(x,y)\in\{0,1,2,3\}^2$ ،2. $P(X=x)=\frac{1}{220}\sum\limits_{y=0}^{3}C_x^3C_y^4C_{3-x-y}^5$, $\forall x\in R_X=\{0,1,2,3\}$

،3. $P\left(Y=y/_{X=0}\right)=\frac{C_y^4C_{3-y}^5}{84}$, $\forall y\in R_Y=\{0,1,2,3\}$ ،4. $P(X=0,Y=0)\neq P(X=0)\times P(Y=0)$ $\Leftarrow$ X و Y غير مستقلين.

3.3. ليكن (X,Y) متغير عشوائي دالة توزيعه الاحتمالية المشتركة معطاة كما يلي:

Y \ X	-1	0	0
-1	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0
0	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0

احسب معامل الارتباط الخطي $r_{(X,Y)}$. هل X و Y مستقلان؟

الحل3.3/ $V(X)=V(Y)=\frac{35}{}$ ، $E(X)=E(Y)=-\frac{5}{}$ ، $E(XY)=\frac{1}{}$

$Cov(X,Y)=-\frac{1}{}$ ، $r_{(X,Y)}=-\frac{1}{}$ ، $r_{(X,Y)}\neq 0$ $\Leftarrow$ X و Y غير مستقلين.

4.3.ليكن (X,Y) متغير عشوائي و $f(x,y)$ دالة كثافته الاحتمالية المشتركة:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x-xy+y) & x\in[0,2] \text{ و } y\in[0,1]\\ 0 & \text{ع.ع}\end{cases}$$

1.عين دالتي الكثافة الحدية $f_X(x)$ و $f_Y(y)$. استنتج طبيعة ومعالم توزيع المتغير Y.

2.عين دالة التوزيع التراكمي المشتركة $F(x,y)$ للزوج (X,Y).

3. احسب الاحتمالات التالية: $P((X\le 2)\cap(Y\le 2))$ و $P((X>1)\cup(Y>1))$.

4. اوجد $Cov(X,Y)$. هل المتغيران X و Y مستقلان؟

الحل4.3/1. $f_X(x)=\frac{x+1}{4}.I_{[0,2]}(x)$ ، $f_Y(y)=.I_{[0,1]}(y)$, Y ~ U([0,1]) ، 2.

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & x\le 0 \text{ أو } y\le 0\\ \frac{x^2+2x}{8} & 0<x<2 \text{ و } y>1\\ \frac{2x^2y-x^2y^2+2xy^2}{8} & 0\le x\le 2 \text{ و } 0\le y\le 1\\ y & x>2 \text{ و } 0\le y\le 1\end{cases}$$

3. $P(X\le 2\cap Y\le 2)=1, P((X>1)\cup(Y>1))=\frac{5}{8}$ ، 4. $Cov(X,Y)=-\frac{1}{36}$ ، X و Y غير مستقلين.

5.3. ليكن (X,Y) متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية المشتركة:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{kx}{y} & x\in]0,1[\text{ و } y\in]1,e[\end{cases}$$

1. أوجد قيمة k.
2. عين دالة التوزيع التراكمي المشتركة $F(x,y)$ لـ (X,Y) .
3. عين دالة الكثافة الحدية $f_X(x)$ لـ X و دالة الكثافة الحدية $f_Y(y)$ لـ Y.
4.احسب الاحتمالات التالية : $P((X=1)\cap(Y\le 2))$ ، $P\left(\left(X>\frac{1}{[illegible]}\right)\cap(Y>2)\right)$ ، $P\left(\left(X\le\frac{1}{[illegible]}\right)\cap(1\le Y\le 2)\right)$.

الحل5.3/ 1. $k=2$ ، 2.

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & x\le 0 \text{ أو } y\le 1\\ x^2 & 0<x<1 \text{ و } y>e\\ x^2\ln y & 0<x<1 \text{ و } 1<y<e\end{cases}$$

، 3. $f_X(x)=2x.I_{]0,1[}(x)$ ، $f_Y(y)=\frac{1}{y}.I_{]1,e[}(y)$ ،

4. $P((X=1)\cap(Y\le 2))=0$ ، $P\left(\left(X>\frac{1}{[illegible]}\right)\cap(Y>2)\right)=0.23$ ، $P\left(\left(X\le\frac{1}{[illegible]}\right)\cap(1\le Y\le 2)\right)=0.063$.

6.3. ليكن (X,Y) متغير عشوائي ذو البعدين و $f(x,y)$ دالة كثافته الاحتمالية المشتركة:

$$f(x,y)=\begin{cases}k & 0\le x<y\le 1\end{cases}$$

1.أوجد قيمة الثابت k.

2. عين دالتا الكثافة الحدية $f_X(x)$ لـ X و $f_Y(y)$ لـ Y.

3. حدد دالة الكثافة الشرطية لـ X علما $Y=y$ ثم استنتج $E(X/Y=y)$ ، $E(X/Y)$ و $V(X/Y)$.

4.احسب $P\left(0<X<\frac{1}{[illegible]}/Y=\frac{3}{[illegible]}\right)$.

الحل6.3/ 1. $k=2$ ، 2. $f_X(x)=2(1-x).I_{[0,1]}(x)$ ، $f_Y(y)=2y.I_{[0,1]}(x)$ ، 3. $f_{X/Y=y}(x)=\frac{1}{y}.I_{[0,y]}(x)$ ، $E(X/Y=y)=\frac{y}{2}$ ، $E(X/Y)=\frac{Y}{2}$ ، $V(X/Y)=\frac{Y^2}{12}$ ، 4. $P\left(0<X<\frac{1}{2}\middle/Y=\frac{3}{4}\right)=\frac{2}{3}$.

7.3. ليكن (X,Y) متغير عشوائي ذو البعدين و $f(x,y)$ دالة كثافته الاحتمالية المشتركة:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{k}{\sqrt{xy}} & (x,y)\in R_{(X,Y)}\end{cases}$$

حيث $R_{(X,Y)}$ هي جميع النقاط المحتوية في المثلث $a\hat{o}b$ والمعرف بالنقاط $o=(0,0)$ ، $a=(0,1)$ و $b=(1,1)$.

1. أوجد قيمة k .
2. عين دالتا الكثافة الحدية $f_X(x)$ لـ X و $f_Y(y)$ لـ Y .
3. عيين دالة الكثافة الشرطية لـ X عِلْما أن $Y=y$ و دالة الكثافة الشرطية لـ Y عِلْما أن $X=x$.

الحل7.3/ 1. $k=\frac{1}{2}$ ، 2. $f_X(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.I_{]0,1]}(x)$ ، $f_Y(y)=I_{[0,1]}(x)$ ، 3. $f_{X/Y}(x)=\frac{1}{2\sqrt{xy}}.I_{]0,1]}(x)\ ;\ x\le y$ ، $f_{Y/X}(y)=\frac{1}{\ldots}.I_{]0,1]}(x)\ ;\ y>x$.

8.3. ليكن (X,Y) متغير عشوائي ذو البعدين و $f(x,y)$ دالة كثافته الاحتمالية المشتركة:

$$f(x,y)=\begin{cases}k\,e^{-x} & 0<x\le y<+\infty\end{cases}$$

1. أوجد قيمة الثابت k.
2. عين دالة التوزيع التراكمي المشتركة $F(x,y)$ للزوج (X,Y) ثم استنتج دالتا التوزيع التراكمي لكل من X و Y
3. احسب الاحتمالات التالية: $F(1{,}5;0)$ ، $P((X>1)\cap(Y>2))$ ، $P((1\le X\le 2)\cap(Y\le 4))$ ، $P((X\le 1)\cap(Y\le 2))$.
4. عين دالتا الكثافة الحدية $f_X(x)$ لـ X و $f_Y(y)$ لـ Y .
5. حدد دالة الكثافة الشرطية $f_{X/Y=y}(x)$. ما هي طبيعة هذا التوزيع؟استنتج $E\left(X/_{Y=y}\right)$.
6. احسب $Cov(X,Y)$. هل X و Y مستقلان؟

الحل8.3/ 1. $k=1$ ، 2. $F(x,y)=\begin{cases}0 & x\le 0 \text{ أو } y\le 0\\ 1-e^{-x} & x>0\\ 1-xe^{-y}-e^{-x} & x>0,\ y>0\ ,\ x\le y\\ 1-ye^{-y}-e^{-y} & y>0\\ 1 & \text{ع.ع}\end{cases}$ ، $F_X(x)=F(x,+\infty)=1-e^{-x}.I_{]0,+\infty[}(x)$ ، $F_Y(y)=F(y,y)=1-ye^{-y}-e^{-y}.I_{]0,+\infty[}(y)$ ، 3. $P((X>1)\cap(Y>2))=2e^{-2}$ ، $P((1\le X\le 2)\cap(Y\le 4))=e^{-1}-e^{-4}-e^{-2}$ ، $P((X\le 1)\cap(Y\le 2))=1-e^{-2}-e^{-1}$ ، 4. $f_X(x)=e^{-x}.I_{]0,+\infty[}(x)\ ;\ X\sim\xi(1)$ ، $f_Y(y)=ye^{-y}.I_{]0,+\infty[}(y)\ ;\ Y\sim\gamma(2,1)$ ، 5. $f_{X/_{Y=y}}(x)=\frac{1}{y}.I_{[0,y]}(x)$ ، $X/_{Y=1}\sim U([0,y])$ ، $E\left(X/_{Y=y}\right)=\frac{y}{2}$ ، 6 . $Cov(X,Y)=1$ ، X و Y غير مستقلين.

9.3.ليكن (X,Y) متغير عشوائي ذو البعدين و $f(x,y)$ دالة كثافته الاحتمالية المشتركة:

$$f(x,y)=\begin{cases}k\,e^{-(x+y)} & 0\le y\le x\end{cases}$$

1. أوجد قيمة الثابت k.
2. عين دالة التوزيع التراكمي المشتركة $F(x,y)$ لـ (X,Y) ثم استنتج ثم استنتج دالتا التوزيع التراكمي لكل من X و Y.

3. احسب الاحتمالات الآتية: $P(X+Y<1)$ ، $P\left(\left(X<\frac{1}{2}\right)\cap\left(Y<1\right)\right)$ ، $P\left(\left(X>1\right)\cap\left(Y>\frac{1}{2}\right)\right)$ ، $P\left((X<2)/(Y=1)\right)$.

4. عين دالة الكثافة الحدية $f_X(x)$ لـ X و دالة الكثافة الحدية $f_Y(y)$ لـ Y. ما هي طبيعة توزيع المتغير العشوائي Y؟

5. حدد دالة الكثافة الشرطية $f_{X/}(x)$.ما هي طبيعة هذا التوزيع؟

الحل1/9.3. $k=2$ ،2. $F(x,y)=\begin{cases}0 & x\le 0 \text{ أو } y\le 0\\ 1+e^{-2x}-2e^{-x} & 0\le x\le y\\ 2e^{-(x+y)}-2e^{-x}-e^{-2y} & 0\le y\le x\end{cases}$ ، $F_X(x)=F(x,+\infty)=1+2e^{-x}-2e^{-x}.I_{[0,+\infty[}(x)$ ، $F_Y(y)=F(+\infty,y)=1-e^{-2y}.I_{[0,+\infty[}(y)$ ،3. $P(X+Y<1)=1-2e^{-1}$ ، $P\left(\left(X<\frac{1}{2}\right)\cap\left(Y<1\right)\right)=1+e^{-1}-2e^{-\frac{1}{2}}$ ، $P\left(\left(X>1\right)\cap\left(Y>\frac{1}{2}\right)\right)=2e^{-\frac{3}{2}}-e^{-2}$ ، $P\left((X<2)/(Y=1)\right)=1-e^{-1}$ ، 4. $f_X(x)=\left(2e^{-x}-2e^{-2x}\right)I_{[0,+\infty[}(x)$ ، $f_Y(y)=2e^{-2y}.I_{[0,+\infty[}(y)$ ، $Y\sim\xi(2)$ ، 5. $f_{X/Y=0}(x)=e^{-x}.I_{[0,+\infty[}(x)$ ، $X/_{Y=0}\sim\xi(1)$.

10.3. ليكن (X,Y) زوج عشوائي دالة كثافته الاحتمالية المشتركة معطاة كما يلي: $f(x,y)=\begin{cases}k\,e^{-x} & -x<y<x\\ 0 & \text{ع.ع}\end{cases}$.

1. أوجد قيمة الثابت k.
2. حدد دالة الكثافة الحدية $f_X(x)$ لـ X و دالة الكثافة الحدية $f_Y(y)$ لـ Y. ما هي طبيعة توزيع المتغير X؟
3. حدد دالة الكثافة الشرطية $f_{Y/}(y)$.ما هي طبيعة هذا التوزيع؟ استنتج $E\left(Y/_{X=x}\right)$.
4. احسب ما يلي: $P\left(Y\le\frac{1}{2}/_{X=1}\right)$ و $P\left(Y\le\frac{1}{2}/\right)$.
5. احسب $Cov(X,Y)$.

الحل1/10.3. $k=\frac{1}{2}$ ، 2. $f_X(x)=xe^{-x}.I_{]0,+\infty[}(x)$ ، $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{y} & y<0\\ \frac{1}{2}e^{-y} & y\ge 0\end{cases}$ ، $X\sim\gamma(2,1)$ ، 3. $f_{Y/X=x}(y)=\frac{1}{2x}.I_{]-x,+x[}(y)$ ، $Y/_{X=x}\sim U\left(]-x,+x[\right)$ ، 4. $P\left(Y\le\frac{1}{2}/\right)=0.75$ ، $P\left(Y\le\frac{1}{2}/\right)=0$ ، 5. $Cov(X,Y)=0$.

11.3. يحتوي وعاء على 3 كريات حمراء، 4كريات خضراء وكرية واحدة بيضاء. نسحب بالإعادة 5 كريات من الوعاء. نعرف المتغيرات العشوائية الآتية X ، Y و Z بحيث: X ={عدد الكريات الحمراء المسحوبة } ، Y ={عدد الكريات الخضراء المسحوبة } و Z ={عدد الكريات الحمراء البيضاء المسحوبة }. احسب احتمال أن نسحب كرية حمراء، 3 كريات خضراء وكرية بيضاء.

الحل 11.3/ الشعاع العشوائي V يتبع توزيع ثلاثي الحدود، $V=(X,Y,Z)\sim M\left(5;\frac{3}{8},\frac{1}{2},\frac{1}{8}\right)$ ، $P(X=1,Y=3,Z=1)=0{,}117$

.

12.3. ليكن $(X,Y,Z)\sim N(\mu,\Sigma)$ حيث $\mu=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ و $\Sigma=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 2\end{pmatrix}$

1.احسب $E(XY)$ ، $E(Y^2)$ ، $E(XZ)$ و $E(Z^2)$.
2.أوجد دالتي الكثافة الاحتمالية المشتركة $f(x,y)$ و $h(x,z)$ لكل من (X,Y) و (X,Z) .
3. هل X و Z مستقلان؟

الحل 1/12.3. $E(XY)=0$ ، $E(XZ)=-1$ ، $E(Z^2)=4$ ، $E(Y^2)=2$ ،2. $\forall(x,y)\in R^2,\ f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}\left[x^2+(y-1)^2\right]\right)$ ، $\forall(x,z)\in R^2,\ h(x,z)=\frac{1}{}\exp\left(-\frac{1}{}\left[2x^2+z^2-4x-4z+2xz+4\right]\right)$ ، X و Z غير مستقلين.

13.3. ليكن (X,Y) متغير عشوائي ذو البعدين دالة كثافته الاحتمالية المشتركة معطاة كما يلي:

$$\forall(x,y)\in R^2,\ f(x,y)=\frac{1}{}\exp\left(-\frac{1}{}\left[4x^2+y^2-6y+6\sqrt{3}.x-2\sqrt{3}x.y+9\right]\right)$$

1. أوجد دالة الكثافة الاحتمالية الحدية $f_X(x)$ لـ X .
2. أوجد دالة الكثافة الاحتمالية الحدية $f_Y(y)$ لـ Y .
3. هل X و Y مستقلان ؟
4. ما هي طبيعة توزيع الزوج العشوائي (X,Y) ؟

الحل 1/13.3. $X\sim N(0,1)$; $\forall x\in R,\ f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ،2. $Y\sim N(3,2)$; $\forall y\in R,\ f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{8}(y-3)^2}$ ،3. X و Y غير مستقلين ،4. $(X,Y)\sim N(\mu,\Sigma)$ ، $\mu=\begin{pmatrix}0\\ \end{pmatrix},\Sigma=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ \end{pmatrix}$.

1.4. ليكن X متغير عشوائي منفصل بحيث : $X\sim U(4)$ أوجد توزيع $Y=X^2$.

الحل 1.4/ $\forall y\in R_Y=\{1,4,9,16\}$: $P(Y=y)=\frac{1}{}$

2.4. ليكن X متغير عشوائي بحيث: $\forall x\in N^*,\ P(X=x)=\left(\frac{1}{}\right)^x$ أوجد توزيع $Y=X^3$.

الحل 2.4/ $\forall y\in R_Y=\{1,8,27,\ldots\}$: $P(Y=y)=\left(\frac{1}{}\right)^{\sqrt{y}}$

3.4. ليكن X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية معطاة كما يلي: $f(x)=4x^{-5}.I_{]1,+\infty[}(x)$.

1. أوجد طبيعة توزيع المتغير $Y=LnX$.
2. ليكن Y_1 و Y_2 متغيران عشوائيان مستقلان بحيث: $\forall i=1,2\ ;\ Y_i\sim\xi(4)$. ما هي طبيعة توزيع $S=Y_1+Y_2$.
3. ما هي طبيعة توزيع المتغير الشرطي $Y_1/(S=s)$ ؟
4. احسب $Cov(Y_1,S)$. هل Y_1 و S مستقلان؟

الحل 3.4/ 1. $Y\sim\xi(4)$ ،2. $S\sim\gamma(2,4)$ ،3. $Y_1/(S=s)\sim U(]0,s[)$ ،4. $Cov(Y_1,S)=\frac{1}{}$ ، Y_1 و S غير مستقلين.

4.4. ليكن X متغير عشوائي مستمر بحيث $X\sim\xi(1)$. أوجد توزيع $Y=3X-2$ وتوزيع $Z=\sqrt{X}$.

الحل 4.4/ $g_Y(y)=\frac{1}{}e^{-\frac{1}{3}(y-2)}.I_{]2,+\infty[}(y)$ ، $g_Z(z)=2ze^{-z^2}.I_{]0,+\infty[}(z)$.

5.4. ليكن X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية معطاة كما يلي : $f(x)=\frac{1}{2}.I_{]-1,1[}(x)$. أوجد توزيع $Y=X^2$.

الحل/5.4

$g(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}.I_{]0,1[}(y)$

6.4. ليكن X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية معطاة كما يلي: $f(x)=2(1-x).I_{]0,1[}(x)$. أوجد توزيع $Y=-Ln(1-X)$.

الحل/6.4 $Y\sim\mathcal{E}(2)$.

7.4. ليكن X_1 و X_2 متغيران عشوائيان مستقلان بحيث: $\forall i=1,2\ ;\ X_i\sim U(]-1,1[)$. أوجد دالة الكثافة المشتركة $g(y_1,y_2)$ للمتغير $Y=(Y_1,Y_2)=(X_1,X_2-X_1)$. ثم استنتج دالة الكثافة الاحتمالية $g_2(y_2)$ للمتغير Y_2 .

الحل/7.4

$g(y_1,y_2)=\frac{1}{4}\quad -1<y_1<1 \text{ و } -1<y_1+y_2<1$ ، $g_2(y_2)=\frac{1}{4}(2-|y_2|).I_{]-2,+2[}(y_2)$

8.4. ليكن (X_1,X_2) متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية المشتركة معطاة كما يلي:

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases} e^{-(x_1+x_2)} & x_1>0 \text{ و } x_2>0 \\ 0 & \text{ع.ع} \end{cases}$$

1. أوجد توزيع $Y=(Y_1,Y_2)=(X_1+X_2,X_1-X_2)$.
2. استنتج التوزيعات الحدية لـ Y_1 و Y_2 و التوزيعات الشرطية لـ $Y_1/Y_2=y_2$ و $Y_2/Y_1=y_1$.
3. احسب $P(Y_1\le 2,Y_2\le 3)$.

الحل 8.4/ 1. $g(y_1,y_2)=\begin{cases} \frac{1}{2}e^{-y_1} & y_1>0 \text{ و } -y_1<y_2<y_1 \\ 0 & \text{ع.ع} \end{cases}$ ، 2. $g_{Y_1}(y_1)=y_1\,e^{-y_1}.I_{]0,+\infty[}(y_1)$ ، $g_{Y_2}(y_2)=\frac{1}{2}\,e^{-|y_2|}\ ;\ (y_2\in R)$ ، $g_{Y_1/Y_2=y_2}(y_1)=e^{-y_1+|y_2|}.I_{]0,+\infty[}(y_1)$ ، $g_{Y_2/Y_1=y_1}(y_2)=\frac{1}{2y_1}\ ;\ (-y_1<y_2<y_1)$ ، 3. $P(Y_1\le 2,Y_2\le 3)=0,594$.

9.4. ليكن X_1 و X_2 متغيران عشوائيان مستقلان بحيث: $\forall i=1,2\ ;\ X_i\sim U([0,1])$.
1. أوجد توزيع $(S,D)=(X_1+X_2,X_1-X_2)$ ثم استنتج التوزيع الحدي لـ D .
2. أوجد توزيع $(P,Z)=(X_1*X_2,X_1)$ ثم استنتج التوزيع الحدي لـ P .
3. أوجد توزيع $(Q,Z)=\left(\frac{X_1}{X_2},X_2\right)$ ثم استنتج التوزيع الحدي لـ Q .

الحل1/9.4. $g(s,d)=\begin{cases} \frac{1}{2} & 0\le s+d\le 2 \text{ و } 0\le s-d\le 2 \end{cases}$ ، $g_S(s)=\begin{cases} s & s\in[0,1] \\ 2-s & s\in[1,2] \\ 0 & \text{ع.ع} \end{cases}$ ، $g_D(d)=\begin{cases} 1+d & d\in[-1,0] \\ 1-d & d\in[0,1] \end{cases}$.

2. $h(p,z)=\begin{cases} \frac{1}{z} & z\in]0,1[\text{ و } p\in]0,1] \\ 0 & \text{ع.ع} \end{cases}$ ، $h_P(p)=\begin{cases} 1 & p\in]0,1] \\ 0 & \text{ع.ع} \end{cases}$ ، 3. $k(q,z)=\begin{cases} z & qz\in]0,1[\text{ و } z\in]0,1[\\ 0 & \text{ع.ع} \end{cases}$ ،

$$k_Q(q)=\begin{cases} \frac{1}{2q^2} & q>1 \\ \frac{1}{2} & q\in[0,1] \\ 0 & \text{ع.ع} \end{cases}$$

10.4. ليكن (X,Y) متغير عشوائي ذو البعدين ،دالة كثافته الاحتمالية المشتركة: $f(x,y)=\begin{cases}6(y-x) & 0\le x<y\le 1\\ 0 & \text{ع.ع}\end{cases}$

أوجد دالة الكثافة المشتركة $g(t,s)$ للزوج $(T,S)=(X,X+Y)$ ثم استنتج توزيع $S=X+Y$.

الحل/10.4 $g(t,s)=\begin{cases}6(s-2t) & 0\le t<s-t\le 1\\ 0 & \text{ع.ع}\end{cases}$ ، $g_S(s)=\begin{cases}\frac{3}{2}s^2 & s\in[0,1]\\ \frac{3}{2}(s-2)^2 & s\in[1,2]\end{cases}$.

11.4. ليكن (X,Y) متغير عشوائي ذو البعدين دالة كثافته الاحتمالية المشتركة معطاة كما يلي: $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}(x+y)} & x>0 \text{ و } y>0\\ 0 & \text{ع.ع}\end{cases}$ و ليكن الزوج (U,V) بحيث $U=X+Y$ و $V=X/Y$. أوجد دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة ثم استنتج طبيعة ومعالم توزيع المتغير U .

الحل/11.4 $g(u,v)=\begin{cases}\frac{1}{4}ue^{-\frac{1}{2}u}\frac{1}{(v+1)^2} & u>0 \text{ et } v>0\\ 0 & \text{ع.ع}\end{cases}$ ، $g_U(u)=\begin{cases}\frac{1}{4}u\,e^{-\frac{1}{2}u} & u>0\end{cases}$ ، $U\sim\gamma(2,1)$.

12.4. ليكن X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية معطاة كما يلي: $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}.I_{]0,1[}(x)$.

1. أوجد طبيعة ومعالم توزيع المتغير العشوائي $Y=-\ln(X)$.
2. ليكن Y_1 و Y_2 متغيران عشوائيان مستقلان بحيث: $\forall i=1,2\ ;\ Y_i\sim\xi\left(\frac{1}{2}\right)$. حدد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي $S=Y_1+Y_2$.
3. أوجد توزيع المتغير $Z=\min(Y_1,Y_2)$.

الحل/12.4 .1 $Y\sim\xi\left(\frac{1}{2}\right)$ ، .2 $S=Y_1+Y_2\sim\chi^2_{(4)}$ ، .3 $Z\sim\xi(1)$.

13.4. ليكن $W\sim\chi^2_{(5)}$.أوجد a و b بحيث: $P(a\le W\le b)=0{,}95$ و $P(W\le a)=0{,}025$.

الحل/13.4 $\begin{cases}P(a\le W\le b)=0{,}95\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P(W\le b)-P(W\le a)=0{,}95\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P(W\le b)=0{,}975\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=12{,}8\end{cases}$

14.4. لتكن المتغيرات العشوائية المستقلة Z ، X ، W ، T ، F التالية:

$Z\sim N(0,\sigma=1)$ ، $X\sim N(0,\sigma=2)$ ، $W\sim\chi^2_{(4)}$ ، $T\sim t_{(8)}$ ، $F\sim F(8,3)$.

1. احسب $P\left((Z>0)\cup(X\le\sqrt{2}\right)$ ، $P(\max((Z,X)<1)$.
2. احسب الاحتمالات التالية: $P(Z>1{,}2)$ ، $P(T>1{,}86)$ ، $P(-13{,}3\le W\le 13{,}3)$ ، $P(|F|>14.5)$.
3. أوجد القيم a و b بحيث: $P(W>a)=0.95$ و $P(T\le b)=0.95$.

الحل /14.4 .1 $P\left((Z>0)\cup(X\le\sqrt{2})\right)=0{,}92067$ ، $P(\max((Z,X)<1)=0{,}3622$ ، .2 $P(Z>1{,}2)=0{,}11507$ ، $P(T>1{,}86)=0{,}05$ ، $P(-13{,}3\le W\le 13{,}3)=0{,}99$ ، $P(|F|>14.5)=0.025$ ، .3 $a=0{,}711$ ، $b=1{,}86$.

15.4. لتكن X_1 ، X_2 ، X_3 ، X_4 متغيرات عشوائية مستقلة تتبع التوزيع الطبيعي بالمعلمتين $\mu = 0$ و $\sigma = \frac{1}{}$.

1. أوجد توزيع و معالم المتغيرات العشوائية الآتية: $U = 3X_1$ ، $V = X_2 + X_3 + X_4$ ، $W = 3V^2$ ، $R = \frac{3X_1^2}{}$.

2. احسب الاحتمالات التالية: $P(U > 0.43)$ ، $P(R < 10.1)$ ، $P(W > 2.71)$ ، $P(V < 1)$.

الحل1/15.4. $U \sim N(0,1)$ ، $V \sim N\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ، $W \sim \chi^2_{(1)}$ ، $R \sim F(1,3)$ ، 2. $P(U > 0{,}43) = 0{,}3336$ ، $P(R < 10{,}1) = 0{,}95$ ، $P(W > 2{,}71) = 0{,}1$ ، $P(V < 1) = 0{,}9582$.

16.4. لتكن Z ، X ، W ، T ، F متغيرات عشوائية مستقلة بحيث :

$Z \sim N(0,1)$ ، $X \sim N(0, \sigma = \sqrt{2})$ ، $W \sim \chi^2_{()}$ ، $T \sim t_{(6)}$ ، $F \sim F(8,5)$.

1. أوجد الاحتمالات التالية: $P(-1 \le W \le 1.24)$ ، $P(-1.44 \le T \le 0)$ ، $P(F > 0.2075)$.

2. أوجد القيم a ، b و c بحيث: $P(W > a) = 0.1$ ، $P(T > b) = 0.8$ و $P(F > c) = 0.025$.

3. أوجد توزيع و معالم المتغيرات العشوائية الآتية:

$V_1 = Z - X$ ، $V_2 = Z^2$ ، $V_3 = \frac{X^2}{} + Z^2 + W$ ، $V_4 = \frac{X^2}{}$ ، $V_5 = X\sqrt{\frac{7}{}}$.

4. ليكن $Z_1,\ Z_2$ متغيران عشوائيان مستقلان لهما نفس توزيع Z . أوجد توزيع و معالم $U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(Z_1 + Z_2)$ و $U_2 = \frac{1}{\sqrt{}}(Z_2 - Z_1)$. أوجد $Cov(U_1, U_2)$. هل U_1 و U_2 مستقلان؟ ما هو توزيع $U_3 = \frac{Z_1 + Z_2}{}$ ؟

الحل1/16.4. $P(-1 \le W \le 1{,}24) = 0{,}01$ ، $P(-1.44 \le T \le 0) = 0.4$ ، $P(F > 0.2075) = 0.975$ ، 2. $a = 12$ ، $b = -0.9$ ، $c = 6.76$ ، 3. $V_1 \sim N(0, \sqrt{3})$ ، $V_2 \sim \chi^2_{(1)}$ ، $V_3 \sim \chi^2_{(9)}$ ، $V_4 \sim F(1,1)$ ، $V_5 \sim t_{(7)}$ ، 4. $U_1 \sim N(0,1)$ ، $U_2 \sim N(0,1)$ ، $Cov(U_1, U_2) = 0$ ، U_1 و U_2 مستقلان ، $U_3 \sim t_{()}$.

1.5. لتكن X_1 ، X_2 ، ..... ، X_n متتالية من $n = 36$ متغيرات عشوائية مستقلة لها نفس التوزيع توقعه الرياضي μ و تباينه $\sigma^2 = 144$. احسب الاحتمال الآتي بطريقتين مختلفتين ثم قارن بين النتيجتين: $P(|\overline{X}_n - \mu| > 8)$.

الحل 1.5/ نظرية $Tchebytchev$. $P(|\overline{X}_n - \mu| > 8) \in [0 ; 0.625]$. نظرية النهاية المركزية $P(|\overline{X}_n - \mu| > 8) \approx 0$.

2.5. لتكن X_1 ، X_2 ، ..... ، X_n n متغيرات عشوائية مستقلة بحيث $\forall k \in \{1,\dots,n\},\ X_k \sim B\left(k, \frac{1}{}\right)$.

1. ما هو توزيع $S = \sum^{n} X_i$.

2. أذا كان $n = 50$ احسب بالتقريب $P(S = 225)$ و $P(S < 225)$.

3. ليكن المتغير العشوائي $f_n = \frac{X_n}{}$. برهن أن f_n تقارب بالاحتمال $\frac{1}{}$.

الحل1/2.5. $S \sim B\left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{1}{5}\right)$ ، 2. $S \approx N(255, \sqrt{204})$ ، $P(S = 225) = 0{,}00311$ ، $P(S < 225) = 0{,}01659$ ، 3.

$\forall \varepsilon > 0,\quad Lim\ P\left(\left|f_n - \frac{1}{}\right| > \varepsilon\right) \le Lim\ \frac{4}{} = 0$.

3.5. لتكن X_1 ، X_2 ، ..... ، X_n n متغيرات عشوائية مستقلة بحيث $\forall i \in \{1,....n\}, X_i \sim N(\mu = 1, \sigma^2 = 2)$.

1. برهن أن $\overline{X}_n$ تقارب بالاحتمال 1 .

2. إذا كان $n = 30$ ، احسب $P(\overline{X}_n \in [0,616 ; 1,459])$.

3. إذا كان $\forall i \in \{1,....n\}, X_i \sim \chi^2_{(1)}$ ، احسب $P(\overline{X}_n \in [0,616 ; 1,459])$.

الحل3.5/ 1. $\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \to +\infty} P(|\overline{X}_n - 1| > \varepsilon) \leq \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n\varepsilon^2} = 0$ ، 2. $P(\overline{X}_n \in [0,616 ; 1,459]) \approx 0,8922$ ، 3. $P(\overline{X}_n \in [0,616 ; 1,459]) = 0,9$.

4.5. ليكن $X \sim B\left(n, \frac{1}{2}\right)$. احسب الاحتمالات التالية باستعمال التوزيع الحقيقي أو التوزيع التقاربي.

1. احسب $P(X = 1)$ إذا كان $n = 9$.

2. احسب $P(X < 51)$ و $P(50 \leq X < 52)$ إذا كان $n = 100$.

3. حدد قيمة المعلمة n بحيث $P(X < 51) \approx 0,987$.

الحل4.5/ 1. $P(X = 1) = 0,0175$ 2. $P(X < 51) = 0,539$ ، $P(50 \leq X < 52) = 0.0518$ ، 3. $n = 65$.

5.5. ليكن $X \sim P(50)$.

1. استعمل التوزيع المناسب لحسب الاحتمالات التالية $P(X = 50)$ ، $P(X < 51)$ و $P(50 \leq X < 52)$.

2. حدد قيمة المعلمة λ بحيث $P(X < 51) = 0.9772$.

الحل5.5/ 1. $P(X = 50) = 0,0558$ ، $P(X < 51) = 0.5279$ ، $P(50 \leq X < 52) = 0.111$ ، 2. $\lambda = 38,1$.

6.5. لتكن X_1 ، X_2 ، ..... ، X_n n متغيرات عشوائية مستقلة تتبع نفس التوزيع بحيث $\forall i, E(X_i) = \mu$ و $\forall i, V(X_i) = \sigma^2$.

1. إذا كان $n = 100$ احسب احتمال أن يكون الفرق بين $\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ و μ على الأكثر $1,96$.

2. إذا كان $n = 50$ احسب احتمال أن يكون $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ أكبر من $50\mu + 10$.

الحل6.5/ 1. $P(|\overline{X}_n - \mu| \leq 1,96) = 0,95$ ، 2. $P(S_n > 50\mu + 10) = 0,4443$.

7.5. لتكن X_1 ، X_2 ، ..... ، X_n ، $n = 100$ متغيرات عشوائية مستقلة تتبع التوزيع الطبيعي بالمعلمتين μ و σ^2 .

$\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ و $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2$. احسب الاحتمالات الآتية: $P(|\overline{X}_n - \mu| > 0,1\sigma)$ ، $P\left(S_n^2 > \frac{3}{4}\sigma^2\right)$ ، $P(\mu - 0,3S_n \leq \overline{X}_n \leq \mu + 0,3S_n)$.

الحل7.5/ $P(|\overline{X}_n - \mu| > 0,1\sigma) = 0,317$ ، $P\left(S_n^2 > \frac{3}{4}\sigma^2\right) = 0,95$ ، $P(\mu - 0,3S_n \leq \overline{X}_n \leq \mu + 0,3S_n) = 0,998$.

8.5. لتكن X_1 ، X_2 ، ..... ، X_n $n = 25$ متغيرات عشوائية مستقلة تتبع التوزيع الطبيعي بالمعلمتين $\mu = 20$ و $\sigma = 4$.

$\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ و $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2$.

1. احسب $P(\overline{X}_n > 22)$ و $P(S_n^2 > 7,24)$ ثم حدد $E(S_n^2)$.

2. حدد قيمة n بحيث يكون $P(|\overline{X}_n - \mu| < 1) = 0,975$.

3. نعتبر المتغير العشوائي Y الذي يمثل عدد العناصر أو الأفراد بحيث $X_i \leq 16$ ، احسب $E(Y)$.

الحل8.5/ 1. $P(\overline{X}_n > 22) = 0,0062$ ، $P(S_n^2 > 7,24) = 0,99$ ، $E(S_n^2) = 16$ ، 2. $n = 80$ ، 3. $E(Y) = 3,96$.

المراجع

- جان بول ماندري .الاحتمالات محاضرات و أعمال موجهة تضم تمارين محلولة .ترجمة أبوبكر خالد سعد الله. المدرسة العليا للأساتذة القبة، الجزائر. الطبعة الثانية 1993.ديوان المطبوعات الجامعية الجزائر.
- أبو صالح م.ص و عوض.م. مقدمة في الاحصاء

- Droesbeke, J. J. (1988). *Eléments de statistique*. Ed. de l'Université de Bruxelles; Ellipses
- Marketing.
- Lebeouf et al. Cours de probabilités et de statistique; Ellipses
- Calot.C. Cours de probabilités Dunod
- Saporta. Probabilités, statistique et analyse de données Technip