**République Algérienne Démocratique et Populaire**

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

# Ecole Supérieure de Commerce

**Polycopié à caractère pédagogique destiné aux étudiants de 3$^{ème}$ année Master en Sciences Financières et Comptabilité, Option Finance, Monnaie et Banque :**

# Produits dérivés

## Cours et exercices


Présenté par :

**Dr. Billel BENILLES**

**Maitre de conférences A**

**Ecole Supérieure de Commerce – Koléa-**


**Année universitaire** : 2022-2023

# Objectifs du cours :

Ce cours vise à familiariser les étudiants avec les produits dérivés tels que les options, les contrats à terme (forwards et futures), les swaps et autres. Il permet aux étudiants de comprendre, sur la base d'exemples concrets (matières premières, taux d'intérêt, actions,), le fonctionnement des marchés dérivés et leur organisation (marchés de gré à gré / marchés organisés). Il permet aussi aux étudiants de bâtir des stratégies d'utilisation de ces produits, d'évaluer les différents produits dérivés et de voir les applications connexes de ces outils dans les différents domaines de la finance d'entreprise, la gestion de portefeuille, la gestion des risques,etc.

# Sommaire

# Chapitre 1 :

# Risques financiers et introduction aux produits dérivés

# I- Les risques financiers

## Introduction

Dans ce chapitre, nous allons commencer par définir la notion de risque et de présenter les différents types de risques financiers. Dans une seconde partie, nous introduisons les produits dérivés et leurs marchés. Nous présenterons les marchés organisés, les marchés de gré à gré, les contrats à terme, les options, les swaps, les FRA, les warrants, les caps et les floors. La dernière partie de ce chapitre portera sur les différents intervenants sur les marchés de produits dérivés.

## 1. Définition et types de risques financiers

Il est relativement difficile de définir la notion de risque. Le risque désigne un danger bien identifié, associé à l'occurrence d'un événement ou d'une série d'événements, parfaitement descriptibles, dont on ne sait pas s'ils se produiront mais dont on sait qu'ils sont susceptibles de se produire dans une situation donnée avec une probabilité donnée. Le risque est lié donc à la survenance d'un événement non prévisible qui peut avoir des conséquences importantes sur le bilan ou le compte de résultat d'une entreprise ou d'une banque.

Ainsi, le risque d'un titre financier représente les fluctuations de valeur de celui-ci ou, ce qui revient au même, la volatilité de la rentabilité du titre. Plus cette volatilité est élevée, plus le risque est élevé et inversement. On exprime mathématiquement la volatilité du titre par l'écart-type des rentabilités : elle s'interprète alors comme une mesure de la dispersion des rentabilités autour de la rentabilité moyenne. On distingue généralement 4 grands types de risques[1] :

### 1.1.Risque de marché

Le risque de marché est le risque de perte qui peut résulter des fluctuations des prix des instruments financiers qui composent un portefeuille. Ce risque peut porter sur le cours des actions, les taux d'intérêt, les taux de change, les cours de matières premières, etc. Par extension, c'est le risque des activités économiques directement ou indirectement liées à un tel marché (par exemple un exportateur est soumis aux taux de change, un constructeur automobile au prix de l'acier...). Il est dû à l'évolution de l'ensemble de l'économie, de la fiscalité, des taux d'intérêt, de l'inflation, et aussi du sentiment des investisseurs vis-à-vis des évolutions futures. Le risque de marché affecte plus ou moins tous les titres financiers.

Dans la théorie moderne du portefeuille, ce risque est généralement mesuré par la volatilité du marché, une donnée statistique, laquelle ne peut toutefois totalement traduire toutes les incertitudes propres aux marchés et encore moins à l'économie en général. Pour un actif donné, le risque de marché est appelé aussi risque systématique, en tant que risque corrélé à la volatilité de l'ensemble du marché. Le risque de marché englobe les risques suivants :

[1] Vernimmen, P. (2005) : Finance d'entreprise

### 1.1.1. Risque de change

C'est le risque sur les variations des cours des monnaies entre elles. Il traduit le fait qu'une baisse des cours de change peut entraîner une perte de valeur des avoirs libellés en devises étrangères. De même, la hausse des taux de change peut entraîner une hausse de valeur en monnaie nationale d'engagements libellés en devises étrangères.

### 1.1.2. Risque de taux d$^{3}$intérêt

Les fluctuations des taux d'intérêt exposent le détenteur de titres financiers au risque de moins-value en capital. C'est paradoxalement un risque de taux dans la mesure où il se traduit pour l'investisseur par un coût effectif ou un manque à gagner en dépit du respect scrupuleux des engagements par l'émetteur.

C'est le risque que les taux de crédit évoluent défavorablement. Ainsi un emprunteur à taux variable, subit un risque de taux lorsque les taux augmentent car il doit payer plus cher. À l'inverse, un prêteur subit un risque lorsque les taux baissent car il perd des revenus.

### 1.1.3. Risque de prix

C'est le risque de fluctuation des prix de matières premières.

## 1.2. Risque la liquidité

C'est le risque sur la facilité à acheter ou à revendre un actif. Si un marché n'est pas liquide, vous risquez de ne pas trouver d'acheteur quand vous le voulez ou de ne pas trouver de vendeur quand vous en avez absolument besoin. C'est un risque lié à la nature du sous-jacent (de la marchandise) mais aussi à la crédibilité de l'acheteur-vendeur. En effet, il est facile d'acheter ou de vendre un produit courant à une contrepartie de confiance, mais plus difficile avec un produit très spécialisé. C'est la liquidité de ce produit. De plus, si l'acheteur-vendeur n'est pas crédible, le risque de contrepartie pour les éventuels fournisseurs-clients, les dissuade de traiter. L'acheteur-vendeur est en risque d'approvisionnement ; en risque de "Liquidité". Pour une banque, c'est le risque de se trouver dans l'incapacité de faire face à un retrait massif des dépôts par les clients.

## 1.3 Risque opérationnel

Les risques opérationnels sont les risques de pertes qui proviennent des erreurs du personnel au sens large, des systèmes ou processus, ou des évènements externes, tels que les risques de détérioration de l'outil industriel, les risques technologiques, les risques climatiques, les risques environnementaux, etc.

## 1.4 Risque de crédit, de contrepartie ou de défaut

Le risque de contrepartie est le risque que la partie avec laquelle un contrat a été conclu ne tienne pas ses engagements, (livraison, paiement, remboursement, etc.).

Le risque de crédit est le risque que l'emprunteur ne rembourse pas sa dette à l'échéance fixée. Il résulte de l'incertitude quant à la possibilité ou la volonté des contreparties à remplir leurs obligations. Il s'étend aussi bien aux organismes bancaires qu'aux entreprises (par le biais de créances qu'elles accordent à leurs partenaires et aux obligataires). Pour une banque, c'est le risque que ses clients soient dans l'incapacité de rembourser leurs emprunts, ou qu'une autre banque avec laquelle elle a des opérations en cours (correspondant bancaire) soit défaillante. Il est naturellement fonction de trois paramètres : le montant de la créance, la probabilité de défaut et la proportion de la créance qui sera recouvrée en cas de défaut.

**Références bibliographiques**

Jean-David DARSA, Risques stratégiques et financiers de l'entreprise. 2e édition. Des enjeux majeurs pour l'entreprise. GERESO Edition, 2011.

Sebastien Galanti, Risques financiers - mesures et conséquences, éditions Pu de rennes, 2018.

Vernimmen, P. (2005) : Finance d'entreprise, Dalloz.

Mamoughli Chokri , Risques et marchés financiers, Support de cours IFID, 2008.

# II- Introduction aux produits dérivés

**Introduction**

L'importance des produits dérivés sur les marchés financiers s'est constamment accrue lors des vingt-cinq dernières années. Les contrats futures et les options font maintenant l'objet de transactions considérables sur de nombreux marchés organisés. Les contrats forward, les swaps et différents types d'options sont régulièrement échangés sur les marchés de gré à gré par les institutions financières, les gérants de fonds et les trésoriers d'entreprise.

Des actifs dérivés sont parfois intégrés à des titres plus classiques comme les actions ou les obligations. Un produit dérivé (ou plus simplement un « dérivé ») est un actif dont la valeur dépend d'autres variables plus fondamentales comme les prix d'autres actifs négociés sur les marchés, les taux d'intérêt, les taux de change ou encore les températures, etc.

Les marchés de dérivés ont connu un développement très rapide. Aujourd'hui sont régulièrement échangés des dérivés de crédit, d'électricité, des dérivés climatiques ou d'assurance. De nouveaux produits dérivés sur taux, actions ou changes ont aussi été créés.

## 1. Marchés des produits dérivés

Les produits dérivés sont à la base composée de trois grandes familles (les contrats à terme de type forward et futures, les swaps et les contrats d'option), ces instruments de gestion des risques financiers sont utilisés pour couvrir 4 sortes de risque (marché, liquidité, contrepartie, politique). Un produit dérivé est un actif dont la valeur dépend d'autres variables plus fondamentales comme le prix d'autres actifs négociés sur les marchés, les taux d'intérêt, les taux de change ou encore les températures, etc. Ils sont négociés soit sur des marchés de gré à gré, soit sur des bourses.

L'importance des produits dérivés sur les marchés financiers s'est constamment accrue de- puis les années 80. Les contrats futurs et les options font maintenant l'objet de transactions considérables sur de nombreux marchés organisés. Les contrats forward, les swaps et différents types d'options sont régulièrement échangés sur les marchés de gré à gré par les institutions financières, les gérants de fonds et les trésoriers d'entreprises.

### 1.1. Marchés organisés

Un marché organisé de produits dérivés est un marché sur lequel sont échangés des contrats standardisés, élaborés par les autorités de marché. Le Chicago Board of Trade a été créé en 1848 pour confronter les offres et demandes de grains des fermiers et des négociants. Au départ, l'objectif essentiel était de standardiser quantités et qualités de grains échangés. Quelques années plus tard, le premier contrat futures a été mis en place. Sur les marchés européens, Eurex est l'un des acteurs essentiels dans la négociation des produits dérivés, le LIFFE (Londres) est l'autre marché de référence.

Traditionnellement, les traders négociaient à un lieu unique, à la criée, à l'aide d'un jeu de signes complexe. Aujourd'hui avec l'évolution technologique, on a assisté à l'émergence de la négociation électronique.

L'introduction des contrats à terme de devises fut la première grande innovation dans le secteur des produits dérivés financiers. Ces instruments sont négociés au Chicago Mercantile Exchange depuis le 16 mai 1972. Les contrats tous cotés en dollar américain, portaient ini- tialement sur la quasi-totalité des grandes devises internationales. Les contrats les plus actifs aujourd'hui ont pour sous-jacent l'euro, le yen, le franc suisse et la livre sterling.

Par la suite, il y a eu l'apparition des contrats à terme sur titres à revenu fixe qui ont ouvert le 20 octobre 1975 et le 6 janvier 1976 par les deux grandes bourses de Chicago (CBOT et CME). Les contrats qui ont eu le plus grand succès ont pour support des obligations, des notes du trésor américain et les dépôts à 3 mois en euro-dollar.

Les premières options négociées sur des marchés organisés furent échangées à Amsterdam le 18 novembre 1982. Il s'agissait d'options sur devises au comptant. Des marchés de même nature furent ouverts à Vancouver et à Montréal en novembre 1982, à Philadelphie en décembre 1982, à Londres en 1985 et à Sydney en 1986.

Les premières options sur taux d'intérêt négociées sur des marchés organisés furent intro- duites en Amsterdam en novembre 1981. De nombreux marchés furent ouverts aux États-Unis et sur différentes places financières internationales mais, que ce soit en Europe, au Canada ou aux États-Unis, ces marchés n'ont pas connu le succès.

Les options sur actions négociées sur les marchés américains ont connu un remarquable développement jusqu'en octobre 1987. La première option sur indice boursier au comptant a été proposée le 11 mars 1983 par le Chicago Board Options Exchange. Elle avait comme actif sous-jacent le S&P 100. Ce marché a immédiatement connu un fantastique essor à la suite duquel de nombreux contrats de même nature, mais reposant sur d'autres indices, furent introduits par différentes bourses localisées aux USA et sur les autres places financières.

Les options sont des instruments utiles et importants pour les investisseurs et les opérateurs qui gèrent des risques. Il importe cependant d'être conscient que l'activité sur ces marchés est inférieure à celle des contrats à terme. Font exception à cette remarque, les options sur actions, sur indices boursiers et sur certains contrats à terme sur titres à revenu fixe. Cette moindre activité soulève le problème de la liquidité de ces marchés. Pour de nombreuses options, cette liquidité est souvent insuffisante, ce qui explique que les utilisateurs se sont déplacés des marchés organisés vers les marchés de gré à gré.

### 1.2.Marchés de gré à gré (Over The Counter, OTC)

Tous les échanges ne sont pas réalisés sur des marchés organisés. Le marché de gré à gré constitue une alternative importante en termes de volumes de transactions. Les échanges sont conclus par téléphone ou par l'intermédiaire de réseaux informatiques entre deux institutions financières ou entre une institution et l'un de ses clients. Ces institutions jouent souvent le rôle de teneurs de marchés pour les produits les plus courants, c'est-à-dire qu'elles cotent les prix auxquels elles sont prêtes à acheter (bid) et les prix auxquels elle acceptent de vendre (ask).

Les transactions sur les marchés OTC sont en général d'un montant moyen plus important que sur le marché organisé. L'avantage essentiel du marché OTC est la possibilité de traiter des produits sur mesure de façon à satisfaire pleinement les besoins de chaque opérateur, la contrepartie étant qu'une des deux parties puisse faire défaut.

## 2. Types de produits dérivés

### 2.1 Contrat Forward

C'est un engagement ferme à acheter ou à vendre un actif (appelé sous-jacent) à une date future donnée pour un prix convenu. Il se distingue d'un contrat au comptant (spot) dans lequel la transaction est réalisée immédiatement. Un contrat forward est échangé sur un marché OTC, le plus souvent entre deux établissements financiers ou entre un établissement financier et un client.

La partie qui s'engage à acheter l'actif prend une position longue, alors que celle qui s'engage à le vendre prend une position courte. Les contrats forward sont très prisés sur le marché des changes.

### 2.2 Contrat Futures

Un contrat futures est, comme un contrat forward, un accord entre deux parties pour acheter ou vendre un actif donné à une date future pour un prix convenu. Contrairement aux contrats forward, les contrats futures sont négociés sur des marchés organisés. Les autorités de marché définissent des contrats standardisés pour assurer la liquidité. Les deux parties prenantes d'un contrat ne se connaissent pas, il existe un mécanisme qui permet d'assurer à l'acheteur et au vendeur la bonne fin des opérations.

Les marchés de contrats futures les plus importants sont aux États-Unis, le Chicago Board of Trade (CBOT) et le Chicago Mercantile Exchange (CME) et en Europe le LIFFE et le l'Eurex.

De très nombreux contrats sont proposés portant sur des matières premières (or, sucre, cuivre, laine, pétrole, etc.) ou sur des actifs financiers (indices, actions, devises, obligations, etc.).

### 2.3 Option

Les options sont échangées sur le marché OTC et sur des marchés organisés. Il en existe deux types :

- Une option d'achat ou call donne à son détenteur le droit et non l'obligation d'acheter une certaine quantité d'un actif sous-jacent à une date future donnée et à un prix fixé à l'avance.

- Une options de vente ou put donne à son détenteur le droit et non l'obligation de vendre une certaine quantité d'un actif sous-jacent à une date future donnée et à un prix fixé à l'avance.

Ce prix est appelé prix d'exercice, la date maximale à laquelle le droit peut être exercé est la date d'échéance. C'est la date à laquelle l'option disparaît et perd toute valeur.

– Une option européenne ne peut être exercée qu'à l'échéance.
– Une option américaine peut être exercée à tout moment jusqu'à l'échéance.

Un point essentiel est que l'achat d'une option donne le droit (mais pas l'obligation) de faire quelque chose. C'est la différence fondamentale avec les contrats forward ou futures pour lesquels les contreparties sont obligées d'acheter ou de vendre. Cette particularité implique qu'acheter un contrat d'option à un coût initial, ce qui n'est pas le cas pour un forward ou un futures.

### 2.4 Swap

Le swap est fondamentalement un échange et sa logique économique est celle du troc. Cet instrument développé au début des années 80 dans le but d'offrir aux opérateurs une protection contre le risque de taux d'intérêt et le risque de change, a connu un remarquable succès.

Un swap implique que l'un des opérateurs s'engage à verser un taux flottant et à recevoir un taux fixe, pendant que l'autre s'engage à recevoir le taux flottant et à verser le taux fixe. Quand les deux opérateurs interviennent dans la même devise, il s'agit d'un swap de taux d'intérêt, quand ils interviennent dans deux devises différentes, il s'agit d'un swap de devises.

L'existence des swaps peut être justifiée par l'argument de l'avantage comparatif. En effet, une entreprise peut avoir un avantage comparatif par rapport à d'autres pour emprunter à taux fixe (ou variable) alors qu'elle veut emprunter à taux variable (fixe). Donc, cette entreprise peut être obligée d'emprunter à taux variable alors qu'elle veut un taux fixe ou bien le contraire. Le swap permet de transformer un emprunt qui ne correspond pas à ses exigences (à taux variable par exemple) en un emprunt qui correspond à ses besoins (à taux fixe par exemple). Donc un swap permettra à une entreprise de bénéficier de l'avantage comparatif qu'elle a sur un marché tout en ayant l'emprunt qui correspond à ses besoins.

Les swaps de devises se présentent sous trois modalités :

- Les opérateurs échangent un taux fixe dans une devise contre un taux variable dans une autre devise.

- Les opérateurs échangent un taux fixe dans une devise contre un taux fixe dans une autre devise.

- Les opérateurs échangent un taux variable dans une devise contre un taux variable dans une autre devise.

## 3. Autres produits dérivés négociés sur les marchés de gré à gré

### 3.1 Forward Rate Agreement (FRA)

Le FRA est un instrument de gestion du risque de taux d'intérêt. Il permet à une entreprise ou à un investisseur qui désire emprunter ou prêter à une date future et sur une période déterminée de couvrir sa position de taux. Acheter un FRA revient à fixer un taux d'emprunt. Vendre un FRA revient à fixer un taux de placement. Le FRA se conclut par le versement d'un différentiel de taux et ne génère aucun autre mouvement de capitaux.

### 3.2 Warrant

Ces instruments sont des options à long terme, de valeur nominale réduite, émis par des banques et en général négociés sur les marchés boursiers. Malgré cette dernière caractéristique, les warrants doivent être considérés comme des instruments de gré à gré, car les marchés ou ils sont négociés ne sont pas dotés de chambre de compensation. Ils peuvent avoir pour actifs sous-jacents des devises, des indices boursiers et des taux d'intérêt. Les warrants peuvent être des calls ou des puts.

Un call warrant (put warrant) donne à son détenteur le droit, mais pas l'obligation, d'acheter (de vendre) une certaine quantité de l'actif sous-jacent, à un prix fixé d'avance, pendant une période déterminée en contrepartie du paiement d'une prime.

Les warrants sont émis par une banque ou une société de bourse pour une échéance de 18 mois, 2 ans voire 5 ans. Les warrants éliminent l'inconvénient majeur des options à court terme, à savoir la perte rapide de la valeur temps à mesure que s'approche l'échéance de l'option. Le second avantage est d'éviter, dans le cas des opérations de couverture à moyen et long terme, d'avoir à rouler les positions et de devoir reporter les options d'échéance en échéance. Ceci réduit très sensiblement le montant des coûts de transaction et simplifie la gestion des positions.

### 3.3 Cap (Plafond)

Le cap est une option sur taux d'intérêt qui permet à un emprunteur de se fixer un taux d'intérêt plafond au-delà duquel il juge le coût d'un emprunt prohibitif et recevra le différentiel entre le taux du marché et le taux plafond.

Le cap permet donc à un opérateur d'être protégé contre une hausse des taux tout en lui permettant de bénéficier d'une éventuelle baisse (c'est l'équivalent du call sur taux d'intérêt). Le cap est très utile pour l'emprunteur à taux variable car il garantit à son détenteur un taux d'emprunt maximal, pour un montant et une durée parfaitement déterminés. Si les taux d'intérêt évoluent au-delà du taux garanti, le vendeur du cap doit verser à l'acheteur la différence entre le taux du marché et le taux garanti. En contrepartie de la garantie qui lui est accordée, l'acheteur du cap verse au vendeur une prime qui lui est définitivement acquise.

### 3.4 Floor (Plancher)

Le floor sur taux d'intérêt est une option sur taux d'intérêt qui permet à un prêteur de fixer un taux plancher en deçà duquel il juge le taux de rémunération insuffisant et recevra le différentiel entre le taux plancher et le taux du marché.

Le floor permet donc à un opérateur d'être protégé contre une baisse des taux, tout en lui permettant de tirer profit d'une éventuelle hausse (c'est l'équivalent du put sur taux d'intérêt). Le floor est très utile pour l'investisseur qui place ses ressources à taux variable. Il garantit à celui qui l'achète un taux de placement minimal pour un montant et une durée parfaitement déterminés. Si les taux d'intérêt évoluent en deça du taux garanti, le vendeur du floor doit verser à l'acheteur la différence entre le taux du marché et le taux garanti. En contrepartie de la garantie qui lui accordé, l'acheteur du floor verse au vendeur une prime qui lui est définitivement acquise.

## 4. Intervenants sur les marchés de produits dérivés

Le succès considérable des marchés de produits dérivés trouve son origine dans la capacité de ces derniers à attirer diverses catégories d'investisseurs. La liquidité, conséquence de ces succès, permet à tout investisseur souhaitant prendre une position en options ou futures de trouver une contrepartie. Nous distinguons trois catégories d'intervenants sur ces marchés :

- Les opérateurs de couverture ou hedgers : utilisent les contrats forward, les futures ou les options pour réduire leur exposition au risque de variation de la valeur des actifs sous-jacents à ces contrats.

- Les spéculateurs : prennent des positions qui sont des paris sur l'évolution future de ces sous-jacents

- Les arbitragistes : cherchent à profiter des incohérences momentanées dans les cotations en prenant des positions sur plusieurs contrats ou marchés.

### 4.1 Opérateurs en couverture

#### 4.1.1 Exemple de couverture à l³aide des contrats forward

Une compagnie américaine doit payer 10 millions d'euros dans trois mois pour des marchandises achetées en France. La compagnie décide de couvrir sa position en prenant une position longue sur un forward trois mois au taux de 1EUR = 1, 6192 USD. Ce choix fixerait le prix à payer pour la marchandise à 16.192.000 USD quelque soit le taux de change EUR/USD dans trois mois. Notez que choisir de ne pas se couvrir peut donner un meilleur résultat si le taux de change baisse à 1, 6000 par exemple, l'absence de couverture entraînerait un décaissement de 16.000.000 USD qui est inférieur à 16.192.000USD. Par contre, si le taux de change augmente à 1, 7000 l'entreprise paiera uniquement 16.192.000USD au lieu de payer 17.000.000USD soit un gain de 808.000USD.

Considérons maintenant une autre entreprise américaine qui exporte ses produits vers la France et doit recevoir 30 millions d'euros dans 6 mois. Elle décide de couvrir son risque de change par une position courte sur un forward 6 mois avec un taux de change de 1EUR = 1, 6094 USD. Après 6 mois l'entreprise américaine recevra 48.282.000USD quel que soit le taux de change. La situation de l'entreprise exportatrice est symétrique à celle de l'importatrice. Si l'euro s'apprécie contre le dollar américain, l'entreprise regrette sa position couverte, alors que si l'euro se déprécie, la recette de la position couverte sera supérieure à celle qui est obtenue en l'absence de couverture.

⇒ La recette et la dépense de la couverture sont connues d'avance, mais à posteriori rien ne dit que la solution retenue se révélera la meilleure.

#### 4.1.2 Exemple de couverture à l³aide des options

– Considérons un investisseur qui détient 1000 titres ABC alors que l'action cote 70 €. L'investisseur craint que le cours baisse dans l'avenir il décide de couvrir sa position en achetant 100 contrats put sur ABC (en France la taille des contrats d'options porte sur 10 actions) avec un prix d'exercice de 65 €. Cela lui donne le droit de vendre 1000 actions à 65 € par action. Si l'option cote 2 €, chaque contrat coûte 20e, soit un décaissement total de 2.000 € . La stratégie coûte 2.000 € mais garantit que les titres pourront être revendus à un prix supérieur à 65 € pendant la durée de vie de l'option. Si les cours chutent au-dessous de 65 € les options seront exercées et la vente rapporterait 65.000 € ou un encaissement net de 63.000 €. Si par contre, les cours augmentent au-dessus de 65 € l'option ne sera pas exercée et expire sans valeur.

### 4.1.3 Conclusion

Il y a donc une différence fondamentale entre une couverture par des contrats forward et une couverture par des options. Les forward sont conçus pour neutraliser le risque, en définissant un prix auquel le hedger achètera ou vendra.

Les options, par contre, procurent une assurance. Elles offrent aux investisseurs un moyen de se protéger contre des mouvements défavorables des cours, tout en leur laissant la possibilité de profiter des mouvements favorables. La contrepartie de cet avantage est le coût d'achat de l'option

## 4.2 Spéculateurs

### 4.2.1 Exemple de spéculation à l³aide des futures

Supposons qu'un spéculateur américain pense que la livre sterling va se renforcer par rap- port au dollar américain dans les deux mois à venir. Le taux de change actuel est 1GBP = 1, 6470 USD. Le spéculateur est prêt à miser 250.000 GBP sur cette anticipation. Deux alternatives d'offrent à lui :

- Acheter 250.000 GBP sur le marché au comptant et attendre l'appréciation de la livre sterling.

- Prendre une position longue sur 4 contrats futures permettant d'acheter 250.000 GBP dans deux mois (chaque contrat porte sur 62.500 GBP). Le prix futures est de 1GBP = 1.6410 USD

| | Achat comptant<br>Prix Comptant $= 1,6470$ | Achat 4 futures<br>Prix futures $= 1,6410$ |
|---|---|---|
| Investissement | $250.000 \times 1,6470 = 411.750\$$ | $20.000\$$ |
| Profit si $S_T = 1,7000$ | $\begin{pmatrix} (1,7000 - 1,6470) \times 250.000 \\ = 13.250\$ \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} (1,7000 - 1,6410) \times 250.000 \\ = 14.750\$ \end{pmatrix}$ |
| Profit si $S_T = 1,6000$ | $\begin{pmatrix} (1,6000 - 1,6470) \times 250.000 \\ = -11.750\$ \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} (1,7000 - 1,6410) \times 250.000 \\ = -10.250\$ \end{pmatrix}$ |

Avec ST représente le prix au comptant dans deux mois.

La différence entre les deux opérations est que la première nécessite une mise initiale de 411.750 USD alors que la seconde opération n'implique qu'une faible mise initiale de l'ordre de 20.000 USD qui doit être déposée par le spéculateur dans un compte de marge. Le marché des futures autorise donc à bénéficier d'un effet de levier. Avec une mise faible, l'investisseur peut prendre une position spéculative importante.

### 4.2.2 Exemple de spéculation à l³aide des options

Supposons qu'un spéculateur pense que le cours de Carrefour est susceptible d'augmenter dans les deux mois. Le prix actuel est de 20 € et un call de prix d'exercice 25 € et échéance deux mois est actuellement coté à 1 € . Le spéculateur est prêt à investir 4.000 € . Deux alternatives s'offrent à lui :

- Acheter immédiatement 200 actions (soit 200 × 20 € = 4.000 €).

- Acheter 400 options (chaque option porte sur 10 actions, le coût d'un contrat est de 10 € ) à un coût total de 400 × 10 × 1 € = 4.000 €.

| | Prix de l'action dans deux mois | |
|---|---|---|
| Stratégie | 15e | 35e |
| Achat des actions | $\left(\begin{array}{c}(15-20)\times 200\\ =-1.000e\end{array}\right)$ | $\left(\begin{array}{c}(35-20)\times 200\\ =3.000e\end{array}\right)$ |
| Achat des calls | $-4.000e$ | $\left(\begin{array}{c}(35-25)\times 4000-4.000e\\ =36.000e\end{array}\right)$ |

Les options créent également un effet de levier, elles entraînent un profit très important si les anticipations se réalisent mais peuvent également entraîner une perte plus élevée si les prix baissent.

⇒ Les deux types de contrats se ressemblent. La différence essentielle est que les contrats futures peuvent conduire à des pertes très importantes, alors que la perte sur les options est limitée à la prime payée.

## 4.3 Arbitragistes

Supposons qu'une action est cotée simultanément 100e à Paris et 1628 à New York. Le taux de change au comptant est 1EUR = 1, 6500USD. Un arbitragiste peut simultanément acheter 100 actions à New York et vendre la même quantité à Paris. En absence de coûts de transactions, il obtient un profit immédiat égal à :

$$100 \times [(1,658 \times 100) — 1628] = 3008$$

Les opportunités d'arbitrage si elles existent sur le marché disparaissent instantanément. La demande excédentaire de l'action à New York va faire monter le prix sur le NYSE et l'offre excédentaire à Paris va faire chuter le prix sur Euronext. Très rapidement, les prix vont redevenir équivalents, compte tenu du taux de change en vigueur.

**Références bibliographiques**

Chancellor E., Devil Take the Hindmost A History of Financial Speculation, New York, Farra Straus Giroux, 199

Merton R. C., « Finance Theory and Future Trends : The Shift to Integration », Risk, 12, 7 (juillet 1999), 48-51.

Miller M. H., « Financial Innovation : Achievements and Prospects », Journal of Applied Corporate Finance, 4 (hiver 1992), 4-11.

Rawnsley J. H., Total Risk : Nick Leeson and the Fall of Barings Bank, New York, Harper Collins, 1995.

Zhang P. G., Barings Bankruptcy and Financial Derivatives, Singapore, World Scientific, 1995.

Hull, J. C., 2011, Options, futures et autres actifs dérivés, 6ème Edition, Pearson Canada

Alain Ruttiens, 2006, Futures, swaps, Options. Les produits financiers dérivés, édipro.

Yves Jégourel, 2005, Les produits financiers dérivés, édition La découverte.

Mamoughli Chokri, Risques et marchés financiers, Support de cours IFID, 2008.

Tjomb Bell , Maitriser les produits dérivés en partant de zéro, Amazone, 2015

## Série d'exercices

# Questions théoriques

- Quelle est la différence entre une position longue et une position courte sur un forward ?
- Expliquez précisément la différence entre un hedgers, arbitragiste et spéculateur ?
- Quelle est la différence entre : prendre une position longue sur un forward avec un prix forward de 50 €  et acheter un call avec un prix d'exercice de 50 €.
- Un trader prend une position courte sur un forward de 100 millions de yens . Le taux de change forward est de 0,008 euro par yen. Combien gagne ou perd le trader si le taux de change à la fin du contrat est (a) 0,0074 € ou (b) 0,0091 € par yen ?
- Un trader prend une position courte sur un contrat futures sur le coton avec un prix futures de 50 cts la livre.  La quantité sous jacente au contrat est 50 000 livre . Combien gagne ou perd le trader si le prix du coton à la fin du contrat est (a) 48,20 cts ou (b) 51,30 cts par Livre ?
- L'émission d'actions apporte des fonds à l'entreprise émettrice. En est-il de même pour une option sur action ? justifiez votre réponse.

## Exercice 1 :

Vous vendez un put sur France télécom au prix d'exercice 25 € avec une durée de vie de trois mois. France télécom cote aujourd'hui 22 € et le contrat porte sur 10 titres.

A quoi vous êtes-vous engagé ? Combien pouvez-vous gagner ou perdre ?

## Exercice 2 :

Vous souhaiteriez spéculer sur la hausse d'une certaine action. Son prix est aujourd'hui de 29 € et un call à trois mois de prix d'exercice 30 € cote aujourd'hui 2,90 €. Vous avez 5 800 € à investir. Définissez deux stratégies conformes à vos anticipations, la première sur l'action, la deuxième sur l'option. Quels sont vos gains (pertes) potentiels sur chacune des deux stratégies ?

## Exercice 3 :

Un trader achète un put européen sur action pour 3 €. Le prix de l'action est 42 € et le prix d'exercice 40 €.  Dans quelles circonstances le trader fera-t-il un profit et dans quels cas l'option sera –t- elle exercée ? Construisez le graphe des profits à l'échéance du contrat en fonction du prix du support ?

## Exercice 4 :

Un investisseur vend un call européen sur action pour 4 €. Le prix de l'action est 47 € et le prix d'exercice 50 €. Dans quelles circonstances le trader fera-t-il un profit et dans quels cas l'option sera –t- elle exercée ? Construisez le graphe des profits à l'échéance du contrat en fonction du prix du support ?

# Chapitre 2 :

# Les futures

## Fonctionnement du marché, détermination des prix et stratégies de couverture

# I- Fonctionnement des marchés de futures

**Introduction**

Les contrats forward et les futures sont des engagements à acheter ou vendre un actif à une date future donnée pour un prix convenu. Les contrats futurs sont négociés sur des marchés organisés et leurs caractéristiques sont standardisés. A l'inverse, les contrats forward sont des accords bilatéraux entre deux institutions financières ou entre une banque et une entreprise. Dans ce chapitre, nous allons décrire le fonctionnement des marchés de futures en précisant la spécification des contrats et les appels de marge.

## 1. Spécification d³un contrat

A la mise en œuvre d'un nouveau contrat, les autorités de marché doivent spécifier les obligations de l'acheteur et du vendeur. Cela suppose le choix de l'actif sous-jacent à livrer, le lieu et la date de livraison. Ces différents choix sont du ressort de celui qui effectue la livraison, c'est-à-dire le vendeur du contrat.

### 1.1 Actif à livrer

– Quand il s'agit d'une matière première, la qualité peut être variable selon la disponibi- lité sur le marché physique. Par conséquent, les autorités spécifient dans les contrats les qualités acceptables pour la livraison. Dans certains cas, un ajustement de prix est réalisé pour tenir compte des différences de qualité.

- Lorsque l'actif sous-jacent au contrat est un actif financier, ce problème ne se pose pas de la même manière. En effet, s'il s'agit d'un contrat sur l'euro, on n'a pas besoin de spécifier le type de l'euro. Par contre, lorsque le sous-jacent est une obligation avec des caractéristiques bien précises, le contrat doit spécifier la liste des obligations livrables (par exemple aux USA toutes les obligations ayant une échéance supérieure à 15 ans). Il faudrait dans ce cas ajuster le prix pour tenir de l'obligation à livrer.
- Les autorités de marché doivent également spécifier la quantité d'actifs sous-jacents livrable pour un contrat. Cette quantité ne doit être ni trop élevée, ni trop faible.

### 1.2. Lieu de livraison

Les autorités de marché spécifient le ou les lieux de livraison lorsque c'est nécessaire. Ce point est crucial pour les marchandises ou matières premières dont le coût de transport est élevé. Quand plusieurs lieux de livraison sont possibles, des ajustements de prix doivent être imposés

### 1.3. Mois de livraison

Un contrat futures est aussi identifié par son mois de livraison. La période du mois pendant laquelle la livraison est possible est prévue par le contrat, mais cette période peut être le mois entier. Les mois de livraison varient d'un contrat à l'autre, ils sont fixés en fonction des besoins des opérateurs de marché. Un contrat sur devises peut proposer des échéances mars, juin, septembre, décembre alors qu'un contrat sur matières premières pourra être coté sur des échéances janvier, mars, mai, juillet, septembre et novembre.

A toute date, se négocient sur le marché l'échéance la plus proche et une ou plusieurs échéances ultérieures. Le contrat doit spécifier la date à laquelle une échéance commence à être cotée et la date à laquelle une cotation cesse.

### 1.4.Variations journalières maximales

Les autorités du marché fixent les variations maximales journalières d'un contrat. En principe, les transactions cessent jusqu'au lendemain quand ces limites sont atteintes, mais dans certains cas les autorités de marché peuvent décider de modifier la limite et reprendre la cotation au cours de la même journée. L'existence de ces limites est justifiée par la volonté de freiner les mouvements de cours dus à une spéculation excessive.

### 1.5. Limites de positions

Ce sont les quantités maximales de contrats que peut détenir un spéculateur. Ici encore, il s'agit de limiter l'influence que peuvent avoir les spéculateurs sur le marché et d'éviter les manipulations. Les opérateurs en couverture (qui détiennent le sous-jacent) ne sont pas concernés par ces limites.

## 2. Appels de marge

Sur les marchés organisés, la chambre de compensation permet d'assurer la bonne fin des contrats. Celle-ci organise les transactions de manière à éviter le défaut des contreparties.

- **Marge initiale** : à l'ouverture d'une position futures, l'investisseur doit déposer en garantie des fonds sur un compte de marge appelé marge initiale. La plupart des brokers rémunèrent les montant déposés sur les comptes de marges, il n'y a donc pas de coûts liés à l'immobilisation des fonds. La marge initiale peut dans certains cas être constituée de titres. Les bons du trésor sont acceptés et comptés pour 90% de leur valeur et les actions sont comptabilisées à 50% de leur valeur. A la fin de chaque journée, le compte de l'investisseur est ajusté pour refléter ses gain et pertes journaliers. Ce mécanisme d'ajustement quotidien est appelé marking to market.
- **Marking to market** : est en quelque sorte une remise des compteurs à zéro chaque jour. C'est comme si on liquidait les contrats chaque jour pour reprendre position sur un nouveau contrat de valeur nulle.
- **Marge de maintenance** : assure que le solde du compte de marge ne devient jamais négatif. Le montant de la marge de maintenance est généralement inférieur à la marge initiale.
- **Appel de marge** : l'investisseur ne fera l'objet d'un appel de marge que si son crédit descend au-dessous de la marge de maintenance, il doit alors apporter les fonds pour reconstituer la marge initiale. Réciproquement, l'investisseur qui a réalisé un gain est autorisé à en disposer. Lorsqu'un investisseur ne peut répondre à un appel de marge, sa position est soldée. La marge initiale assure que cette opération peut être close dans de bonnes conditions. Il faut donc qu'à tout instant les fonds du compte de marge permettent la liquidation de la position sans qu'il y ait défaut de l'investisseur.

- **Exemple de transaction sur un contrat futures**

Considérons un investisseur qui le 5 juin veut prendre une position longue sur deux contrats sur l'or, échéance décembre. Chaque contrat porte sur 100 onces d'or, ce qui équivaut à un achat à terme de 200 onces d'or. Le prix futures est de 4008/once. La marge initiale est de 2.0008 par contrat et la marge de maintenance est de 1.5008 par contrat. Les appels de marge sont donnés dans le tableau suivant :

| Jour | Prix futures | Gain du jour | Gain cumulé | Solde du compte de marge | Appel de marge |
|---|---|---|---|---|---|
| | 400,00$ | | | 4.000$ | |
| 5 Juin | 397,00$ | (600$) | (600$) | 3.400$ | |
| 6 Juin | 396,10$ | (180$) | (780$) | 3.220$ | |
| 9 Juin | 398,20$ | 420$ | (360$) | 3.640$ | |
| 10 Juin | 397,10$ | (220$) | (580$) | 3.420$ | |
| 11 Juin | 396,70$ | (80$) | (660$) | 3.340$ | |
| 12 Juin | 395,40$ | (260$) | (920$) | 3.080$ | |
| 13 Juin | 393,30$ | (420$) | (1.340$) | **2.660$** | **1.340$** |
| 16 Juin | 393,60$ | 60$ | (1.280$) | 4.060$ | |
| 17 Juin | 391,80$ | (360$) | (1.640$) | 3.700$ | |
| 18 Juin | 392,70$ | 180$ | (1.460$) | 3.880$ | |
| 19 Juin | 387,00$ | (1.140$) | (2.600$) | **2.740$** | **1.260$** |
| 20 Juin | 387,00$ | 0$ | (2.600$) | 4.000$ | |
| 23 Juin | 388,10$ | 220$ | (2.380$) | 4.220$ | |
| 24 Juin | 388,70$ | 120$ | (2.260$) | 4.340$ | |
| 25 Juin | 391,00$ | 460$ | (1.800$) | 4.800$ | |
| 26 Juin | 392,30$ | 260$ | (1.540$) | 5.060$ | |

### 3. Livraison d'un contrat futures

Tout contrat acheté ou vendu se dénoue au plus tard à l'échéance. L'originalité des marchés à terme est de prévoir deux dénouements possibles : la livraison effective ou la compensation.

- La manière la plus simple est de remplir les obligations du contrat en livrant ou en pre- nant livraison de l'actif sous-jacent. Cette méthode est peu pratiquée. Moins de 1% des contrats se dénouent en moyenne par une livraison effective de l'actif sous-jacent, car c'est une opération lourde, assez coûteuse et peu justifiée dans la plupart des cas. Quand un investisseur A décide de livrer, son broker transmet une notice d'intention de livraison à la chambre de compensation. Cette notice stipule le nombre de contrats concernés et dans le cas de matières premières, le lieu de livraison et éventuellement la qualité du produit livré. Les autorités de marché sélectionnent alors l'acheteur qui prendra livraison. Celui-ci n'est pas forcément celui qui avait initialement acheté le contrat. La chambre de compensation choisit en général l'acheteur dont la position longue est la plus ancienne. Pour éviter de devoir prendre livraison du sous-jacent, un acheteur du contrat doit donc solder sa position avant le premier jour de la période de livraison.

- Dans la quasi-totalité des cas, le dénouement d'un contrat à terme se réalise par une compensation de l'opération initiale. Les traders préfèrent souvent fermer leur position sur le marché avant la date de livraison. Pour fermer une position, il suffit de prendre la position inverse sur le marché. Par exemple, l'investisseur A qui avait acheté le contrat le 5 mars peut vendre ce même contrat le 20 avril. L'investisseur B qui avait vendu un contrat peut en acheter un pour fermer sa position. Dans les deux cas, le gain ou la perte sont déterminés par la différence entre les prix futures aux deux dates (5 mars et 20 avril). Il est à noter que même si A avait acheté de B le 5 mars, B n'est pas concerné par la revente de A le 20 avril, cette transaction se fera avec un troisième investisseur et ainsi de suite.

- Certains contrats, comme ceux dont le sous-jacent est un indice, sont dénoués en cash du fait de l'impossibilité de livrer le sous-jacent

**4. Convergence des prix futures vers les prix au comptant**

A l'approche de l'échéance, le prix futures d'un contrat converge vers le prix de l'actif sous-jacent. Quand la période de livraison est atteinte, les deux prix sont égaux ou du moins très proches. Si ce n'est pas le cas, des opportunités d'arbitrage existent. Si par exemple le prix futures est supérieure au prix spot, un arbitragiste pourrait vendre le contrat futures, acheter l'actif sous-jacent au comptant et livrer. Il pourrait ainsi encaisser la différence entre le prix futures et le prix spot.

**5. Contrats forward et contrats futures**

Les deux contrats sont des engagements d'achat et de vente d'un actif sous-jacent à un prix spécifié et à une date future donnée. Les différences essentielles entre ces deux contrats sont listées dans le tableau suivant :

| **Forward** | **Futures** |
|---|---|
| - Négocié sur un marché de gré à gré<br>- Non standardisé<br>- Une date fixe de livraison<br>- Un seul flux à la fin du contrat<br>- Livraison ou dénouement en cash sont la norme | - Négocié sur un marché organisé<br>- Contrat standardisé<br>- Un mois de livraison<br>- Marking to market quotidien<br>- Positions le plus souvent dénouées avant l'échéance |

## Références bibliographiques

Duffie D., Futures Markets, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1989.

Gastineau G. L., D. J. Smith et R. Todd, Risk Management, Derivatives and Financial Analysis under SFAS n° 133, The Research Foundation of AIMR and Blackwell Series in Finance, 2001.

Jorion P., « Risk Management Lessons from Long-Term Capital Management », European Financial Management, 6, 3 (septembre 2000), 277-300 .

Kawaller I. G. et P. D. Koch, « Meeting the Highly Effective Expectation Criterion for Hedge Accounting », Journal of Derivatives, 7, 4 (été 2000), 79-87.

Lowenstein R., When Genius Failed : The Rise and Fall of Long-Term Capital Management, New York, Random House, 2000.

Tjomb Bell , Maitriser les produits dérivés en partant de zéro, Amazone, 2015

Hull, J. C., 2011, Options, futures et autres actifs dérivés, 6ème Edition, Pearson Canada

Mamoughli Chokri , Risques et marchés financiers , Support de cours IFID, 2008.

Yves Jégourel, 2005, Les produits financiers dérivés, édition La découverte.

BELLALAH M., et SIMON Y., Option, Contrat à terme et gestion de risque, 2 ème édition, economica, Paris, 2003.

## Série d'exercices

## Questions théoriques

- Quels sont les éléments essentiels dans la définition d'un contrat futures ?
- Expliquer comment le système des appels de marge protège les investisseurs contre le risque de défaut ?

## Exercice 1

Un investisseur prend une position longue sur deux contrats de jus d'orange congelé. Chaque contrat porte sur 15 000 livres. Le prix futures est de 160 cents par livre et le déposit initial est de 6000 $ par contrat, la marge à maintenir ensuite étant de 4500 $ par contrat. Quelle variation de prix entrainera un appel de marge ? Dans quelles conditions l'investisseur pourra – t – il retirer 2000 $ de son compte de deposit ?

## Exercice 2

Supposez que vous preniez une position courte sur un contrat vous engageant à vendre de l'argent en juillet à 17,20 $ l'once sur le New York Commodity Exchange. La taille du contrat est de 5000 onces. Le deposit est de 4000 $ et la marge à maintenir est de 3000 $. Quelle variation minimale de prix conduira à un appel de marge ? Que se passe-t-il si vous n'y répondez pas ?

## Exercice 3

Une entreprise prend une position courte sur un contrat futures portant sur 5000 boisseaux de blé à 450 cts par boisseaux. Le deposit initial est de 3000 $ et la marge à maintenir ensuite est 2000 $. Quelle variation minimale de prix entrainera un appel de marge ? Dans quelles conditions l'entreprise peut-elle retirer 1500 $ de son compte ?

## Exercice 4

Le tableau suivant présente certaines opérations effectuées sur le compte de marge d'un contrat futures sur matière première. Un investisseur prend une position sur le marché à terme le 25 janvier et la dénoue le 28 février. Voici quelques informations

- Chaque contrat porte sur 100 unités.
- Les prix futures sont donnés par unité.
- La marge de maintenance est de 1.000$ par contrat

| Jour | Prix Futures | Gains/Pertes quotidiens | Gains cumulatifs | Solde du Compte de marge | Appel de marge |
|---|---|---|---|---|---|
| | 200 $ | | | 4.500 $ | |
| 25 janv | 198 $ | 600 $ | 600 $ | 3.900 $ | |
| 30 janv | 196,10 $ | -450 $ | -1.170 $ | ???? | ???? |
| 31 janv | 194,10 $ | -600 $ | -1.170 $ | 2.703 $ | ???? |
| 6 Fev | 188,60 $ | 300 $ | -3.420 $ | 4.800 $ | ???? |
| 27 Fev | ????? | | | | |
| 28 Fev | 193,10 $ | 450 $ | ???? | 6.105 $ | |

1- Est-ce que l'investisseur a une position longue ou courte et sur combien de contrats ?

2- Quelle est la marge initiale requise par contrat

3- Quel est le prix futures le 27 février ?

4- Etant donné qu'aucun appel de marge n'a été effectué avant le 30 janvier, quel est le solde du compte de marge à la date du 30 janvier

5- Quel est le montant du gain cumulatif à la date du 28 février.

# II. Evaluation des contrats forward et futures

Nous analyserons dans ce chapitre les liens entre les prix forward, prix futures et prix au comptant.

### 1. Notions utiles à l³évaluation des forward et futures

#### 1.1. Rappel sur les mesures de taux d³intérêt

La fréquence de composition des intérêts définit l'unité de mesure du taux d'intérêt. Considérons un montant A investi pendant n années à un taux annuel R. Si la composition est annuelle on obtient à la fin des n années :

$$A\,(1+R)^n$$

Si la composition des intérêts a lieu m fois par an, le résultat final est :

$$A\left(1+\frac{R}{m}\right)^{mn}$$

La limite quand m tend vers l'infini s'appelle composition en continu des intérêts. Capitaliser en continu une somme quelconque pendant n années au taux R consiste à multiplier cette somme par $e^{Rn}$. Actualiser sur n années au même taux R en continu revient à multiplier par $e^{-Rn}$. Dans tout le cours nous nous baserons sur des actualisations et capitalisations en continu.

Il est possible de convertir un taux composé m fois par an en un taux continu et vice versa en utilisant les relations suivantes :

$$R_c = m \times \ln\left(1+\frac{R_m}{m}\right)$$

$$R_m = m \times \left(e^{\frac{R_c}{m}} - 1\right),$$

Avec Rc un taux continu et Rm un taux équivalent pour une composition m fois par an.

**Exemple 1** : Soit un taux de 10% composé semestriellement, le taux continu équivalent est

$$R_c = 2 \times \ln\left(1+\frac{0,10}{2}\right) = 9,7580\%.$$

**Exemple 2 :** Soit un taux capitalisé en continu de 8%, le taux équivalent capitalisé trimestriellement est

$$R_4 = 4 \times \left(e^{\frac{0,08}{4}} - 1\right) = 8,0805\%.$$

#### 1.2 Actifs d³investissement et actifs de consommation

- Un actif d'investissement est un actif considéré par une majorité d'investisseurs comme un moyen d'investir, c'est le cas des obligations, des actions ou encore de l'or et de l'argent. Il est à noter que l'argent a des usages industriels multiples mais il est considéré comme un véhicule d'investissement.

- Un actif de consommation est un actif qui est prioritairement détenu pour la consommation tel que le cuivre, le pétrole, le blé, etc.

### 1.3 Ventes à découvert

Certaines stratégies d'arbitrage nécessitent de vendre à découvert. Cette opération consiste à vendre des actifs que l'on ne possède pas. Considérons l'exemple suivant :

- Un investisseur passe auprès de son intermédiaire un ordre de vente à découvert de 500 actions IBM en avril alors que le cours était à 1208, il reçoit 500 × 1208 = 60.0008
- Il dénoue sa position en juillet alors que le cours est à 1008, il paie 500 × 1008 = 50.0008
- Entre temps IBM paie en mai 18 de dividende par action. L'investisseur doit payer au propriétaire de l'action 500 × 18 = 5008.
- L'investisseur réalise un profit de

  60.0008 - 50.0008 - 5008 = 9.5008
- Si le prix en juillet était de 1308, l'investisseur subit une perte de :

  60.0008 - 65.0008 - 5008 = - 5.5008

## 2. Hypothèses et notation

Nous supposons que ces hypothèses sont vérifiées pour certains intervenants du marché :

- Absence de frais de transaction.
- Le taux d'imposition sur les profits est identique pour tous.
- Même taux sans risque sur les prêts et les emprunts.
- Les opérateurs profitent des opportunités d'arbitrage dès qu'elles apparaissent.

Nous utilisons les notations suivantes :

T : délai jusqu'à la date de livraison d'un contrat forward ou futures (mesuré en années).

$S_O$ : prix de l'actif sous-jacent au contrat à la date 0 (aujourd'hui).

$F_O$ : prix forward ou futures aujourd'hui.

r : taux sans risque annuel continu pour un placement ou emprunt de T années.

## 3. Prix forward d³un actif d³investissement

Le contrat forward le plus facile à évaluer est un contrat dont le sous-jacent est un actif n'engendrant pas de revenus pendant la durée de vie du contrat. Les actions ne versant pas de dividendes et les obligations zéro-coupon sont des exemples de ce type d'actif.

### 3.1.Exemple numérique

Considérons un contrat forward d'échéance 3 mois sur une action ne versant pas de dividende. Le cours de l'action est $S_O = 408$ aujourd'hui et le taux sans risque est de 5% par an. Considérons les deux stratégies d'arbitrage suivantes :

– Si le prix forward est $F_O = 438$, un arbitragiste peut :

– Emprunter 408 au taux sans risque pendant 3 mois,
– Achter une action à 408,
– Prendre une position courte sur un contrat forward pour vendre l'action dans 3 mois à 438,

En agissant ainsi, l'arbitragiste pourra réaliser un profit sans risque de 2, 58.

| | **Aujourd'hui** | **3 mois plus tard** |
|---|---|---|
| **Emprunter 40\$ à 5%** | $40,00\$$ | $-40e^{0,05\times\frac{3}{12}} = -40,50\$$ |
| **Acheter une action** | $-40,00\$$ | |
| **Vendre un contrat forward** | | $43,00\$$ |
| **Profit** | **\$0.00** | **\$2.50** |

– Si le prix forward est 5O = 398, un arbitragiste peut :

- Vendre à découvert une action à 408,

- Placer le produit de la vente au taux sans risque pendant 3 mois,

- Prendre une position longue sur un contrat forward pour acheter l'action dans 3 mois à 398,

En agissant ainsi, l'arbitragiste pourra réaliser un profit sans risque de 1, 58.

| | **Aujourd'hui** | **3 mois plus tard** |
|---|---|---|
| **Vendre une action** | $40,00\$$ | |
| **Placer 40\$ à 5%** | $-40,00\$$ | $40e^{0,05\times\frac{3}{12}} = 40,50\$$ |
| **Acheter un contrat forward** | | $-39,00\$$ |
| **Profit** | **\$0.00** | **\$1.50** |

Cet exemple montre que l'absence d'opportunités d'arbitrage requiert un prix forward exactement égal à 40, 508.

### 3.2.Généralisation

Le prix forward d'un contrat portant sur un actif d'investissement qui ne verse pas de revenu est donné par la relation suivante :

$$F_0 = S_0\, e^{rt}$$

– Si $F_0 > S_0\, e^{rt}$ , les arbitragistes achètent l'actif et vendent le forward.
– Si $F_0 < S_0\, e^{rt}$ , les arbitragistes achètent le forward et vendent l'actif à découvert.

## 4. Cas d³un flux intermédiaire connu

Supposons maintenant que l'actif sous-jacent au contrat paie un flux (dividende ou coupon) pendant la durée de vie du contrat, le montant de ce flux étant supposé connu.

### 4.1.Exemple numérique

Considérons un contrat forward sur une obligation à coupons, cotée aujourd'hui à 9008.
L'échéance du contrat forward est dans 10 mois. L'obligation verse un coupon de 408 dans 5 mois et un autre de même montant dans 10 mois, juste avant l'échéance du forward. Les taux sans risque annuel pour 5 mois et 10 mois son respectivement de 7% et 9%.

- Si le prix forward est $F_0$ = 9108, un arbitragiste peut :

- Emprunter 9008 pour acheter l'obligation (la valeur actuelle du premier coupon peut être empruntée à 7% pour 5 mois, donc elle pourra être remboursée avec la réception du premier coupon et le reste sera emprunté à 9% pour les 10 mois),
- Prendre une position courte sur un contrat forward pour vendre l'obligation dans 10 mois à 9108,
- En agissant ainsi, l'arbitragiste pourra réaliser un profit sans risque de 21, 788.

| | Aujourd'hui | 5 mois plus tard | 10 mois plus tard |
|---|---|---|---|
| Emprunter 900$ | | | |
| 1. Emprunter 38,85$ à 7% pour 5 mois | $40e^{-0.07\times\frac{5}{12}} = 38,85\$$ | $-40,00\$$ | |
| 2. Emprunter 861,15$ à 9% pour 10 mois | 861, 15$ | | −928, 22$ |
| Acheter une obligation | −900, 00$ | | |
| Recevoir coupons | | 40, 00$ | 40, 00$ |
| Vendre un contrat forward à 10 mois | | | 910, 00$ |
| **Profit** | **0,00$** | **0,00$** | **21,78$** |

- Si le prix forward est $F_0$ = 8818, un arbitragiste peut :

- Vendre l'obligation à 9008 (la valeur actuelle du premier coupon peut être placée à 7% pour 5 mois, donc elle pourra servir à payer le premier coupon et le reste sera placé à 9% pour 10 mois),
- Prendre une position longue sur un contrat forward pour acheter l'obligation dans 10 mois à 8818,
- En agissant ainsi, l'arbitragiste pourra réaliser un profit sans risque de 7, 228.

| | Aujourd'hui | 5 mois plus tard | 10 mois plus tard |
|---|---|---|---|
| Vendre une obligation | 900$ | | |
| 1. Placer 38,85$ à 7% pour 5 mois | $-40e^{-0.07\times\frac{5}{12}} = -38,85\$$ | 40, 00$ | |
| 2. Placer 861,15$ à 9% pour 10 mois | −861, 15$ | | +928, 22$ |
| Payer coupons | | −40, 00$ | −40, 00$ |
| Vendre un contrat forward à 10 mois | | | −881$ |
| **Profit** | **0,00$** | **0,00$** | **7,22$** |

Cet exemple montre que l'absence d'opportunités d'arbitrage requiert que le prix forward soit égal à 888, 228.

### 4.2.Généralisation

– Nous pouvons montrer que le prix forward d'un contrat, sur un actif payant des flux dont la valeur actuelle est I, est égal à :

$$F_0 = (S_0 - I)\; e^{rt}$$

– Si $F_0 > (S_0 - I)\; e^{rt}$ , les arbitragistes achètent l'actif et vendent le forward.
– Si $F_0 < (S_0 - I)\; e^{rt}$, les arbitragistes achètent le forward et vendent l'actif à découvert.

Dans l'exemple précédant, la valeur actuelle des coupons est donnée par :

$$I = 40e^{-0{,}07\times\left(\frac{5}{12}\right)} + 40e^{-0{,}09\times\left(\frac{10}{12}\right)} = 75,96\$$$

Ainsi, le prix forward sera donné par la formule suivante :

$$F_0 = (900 - 75,96)\; e^{0{,}09\times\left(\frac{10}{12}\right)} = 888,22\$$$

**Exemple 3** Considérons un forward à 9 mois sur une action cotée $S_0$ = 508, qui paiera des dividendes égaux à 0, 758 par action dans 2 mois, 4 mois et 6 mois. Ge taux sans risque est de 9% pour toutes les maturités. Sa valeur actuelle des dividendes est :

$$I = 0,75e^{-0{,}09\times\frac{2}{12}} + 0,75e^{-0{,}09\times\frac{4}{12}} + 0,75e^{-0{,}09\times\frac{6}{12}} = 2,18\$$$

Ce prix formard est égal à :

$$F_0 = (50 - 2,18)\; e^{0{,}09\times\frac{9}{12}} = 51,15\$$$

### 5. Cas d³un actif à rendement connu

Supposons maintenant un actif qui paie un rendement continu au taux q plutôt qu'un flux à une date donnée. Nous supposons que les rendements sont composés en continu. Nous pouvons montrer que le prix forward d'un contrat, sur un actif payant un rendement continu est donné par la formule suivante :

$$F_0 = S_0\; e^{(r-q)t}$$

Considérons un contrat forward à 6 mois sur un actif procurant un seul revenu de 4% du prix de l'actif sous-jacent composé semestriellement. Le taux sans risque annuel est de 10%. Le prix de l'actif est de 258. Le taux de rendement moyen continu est égal à :

$$q = 2 \times \ln 1 + 4\% = 3,9605\%$$

Ainsi, le prix forward est égal à :

$$F_0 = 25 \times e^{(10\% - 3{,}9605\%)\times\frac{6}{12}} = 25,77\$$$

## 6. Evaluation des contrats forward

- K : le prix de livraison. Ce prix est défini dans le contrat, il reste constant durant toute la vie du contrat.
- $F_0$ : le prix forward qui s'applique à un contrat aujourd'hui et qui évite les opportunités d'arbitrage.
- T : la durée de vie résiduelle du contrat.
- r : le taux d'intérêt sans risque.
- $f$ : la valeur du contrat forward aujourd'hui.

La valeur d'un contrat forward est toujours nulle au moment où il est créé. Ainsi, à la date de négociation initiale, K = $F_0$ et $f$ = 0. Au fur et à mesure que le temps passe, K reste constant, $F_0$ change, T également et par conséquent la valeur $f$ sera soit positive, soit négative.

- La valeur d'une position longue sur un contrat forward dont le prix de livraison est K est égale à :

$$f = (F_0 - K) \times e^{-rT}$$

- La valeur d'une position courte sur un contrat forward dont le prix de livraison est K est égale à :

$$f = (K - F_0) \times e^{-rT}$$

En utilisant les formules précédentes de calcul des prix forward, nous obtenons les équations suivantes de calcul des valeurs des contrats forwards :

– Contrat forward sur un actif d'investissement qui ne paie aucun revenu :

$$f = (F_0 - K)e^{-rT} = \left(S_0 e^{rT} - K\right) e^{-rT} = S_0 - Ke^{-rT}$$

– Contrat forward sur un actif d'investissement qui paie un flux intermédiaire connu dont la valeur actuelle est I :

$$f = (F_0 - K)e^{-rT} = \left[(S_0 - I)\, e^{rT} - K\right] e^{-rT} = S_0 - I - Ke^{-rT}$$

– Contrat forward sur un actif d'investissement qui paie un taux de rendement connu q :

$$f = (F_0 - K)e^{-rT} = \left[S_0 e^{(r-q)T} - K\right] e^{-rT} = S_0 e^{-qT} - Ke^{-rT}$$

Les prix forward sont-ils égaux aux prix futures ?

- Si le taux sans risque est constant et indépendant de la maturité, les prix forward et les prix futures sont identiques pour des contrats de même maturité.

- Quand les taux varient de façon aléatoire, les prix des deux contrats ne seront plus égaux :

(a) Quand le prix de l'actif sous-jacent est fortement corrélé positivement au taux sans risque, le prix futures est supérieur au prix forward. En effet, quand S augmente un investisseur qui détient une position longue sur un futures réalise un gain immédiat par le système d'appels de marge. La corrélation positive indique que les taux d'intérêt vont augmenter probablement.

Le gain réalisé va donc être placé à un taux plus élevé. De même quand S diminue, l'investisseur subit une perte immédiate qui sera financée par un taux plus faible. Par contre, un investisseur qui détient une position sur un contrat forward n'est pas affecté par les variations de taux. Par conséquent, le contrat futures est plus attractif que le contrat forward.

(b) Quand le prix du sous-jacent est négativement corrélé avec le taux d'intérêt, le prix forward devrait être plus élevé que le prix futures.

Quand l'échéance est proche, la différence entre les deux prix est suffisamment faible pour pouvoir être ignorée. Dans ce cours, nous supposons l'égalité entre les prix forward et futures.

## 7. Contrats futures sur indices

Un indice peut être considéré comme un actif d'investissement qui paie un taux de dividende constant. L'actif d'investissement est le portefeuille hypothétique de titres qui constitue l'indice et les dividendes sont ceux qui seront reçus par le détenteur du portefeuille. Les principaux indices européens sont le CAC40, le DAX30, le FTSE100. Les indices américains sont le Dow Jones 30, un contrat futur sur cet indice est coté sur le CBOT et porte sur 108 fois la valeur de l'indice. Le S&P500, deux contrats futures sur cet indice sont négociés sur le CME l'un porte sur 2508 fois la valeur de l'indice et l'autre sur 508 fois cette valeur.

En supposant que les dividendes sont payés en continu à un taux q plutôt qu'à une ou plusieurs dates précises, le prix futures du contrat est donné par :

$$F_0 = S_0 \ e^{(r-q)T}$$

Considérons un contrat futures à 3 mois sur le S&P500 et supposons que les titres composant le portefeuille paient un rendement en dividende q = 1% et que la valeur de l'indice est de 400.

Le taux sans risque annuel est r = 6%: Le prix futures doit être égal :

$$F_0 = 400 \times e^{(6\% - 1\%) \times \frac{3}{12}} = 405,03\$$$

Si le prix futures est différent de 405; 03$ il y aura des opportunités d’arbitrage.

- Si F0 > $S_0 \ e^{(r-q)T}$ , un profit peut être réalisé en achetant au comptant les actions composant l’indice et en vendant le contrat futures.

- Si F0 < $S_0 \ e^{(r-q)T}$ , un profit peut être réalisé en vendant les actions composant l’indice et en achetant le contrat futures.

Dans la pratique, l’arbitrage sur indice est réalisé sur un petit portefeuille d’actions dont les mouvements sont fortement corrélés à ceux de l’indice. Il faut pouvoir opérer simultanément sur le contrat futures et sur les actions composant l’indice.

## 8. Contrats futures et forwards sur devises

L'actif sous-jacent de ces contrats est une certaine quantité de devises. On posera pour simplifier $S_O$ le prix en USD d'une unité de devise étrangère pour un investisseur américain et $F_0$ le prix forward correspondant. On notera $r_f$ le taux sans risque du pays étranger correspondant à la devise. r désigne le taux sans risque domestique. Une devise étrangère peut être assimilée à un actif qui paie un taux de dividende. Ce taux de dividende correspond au taux sans risque étranger. Il s'en suit que le prix forward sur devise est donné par :

$$F_0 = S_0\, e^{(r-rf)T}$$

C'est la relation de parité de taux d'intérêt bien connu en finance internationale. Cette relation peut être expliquée comme suit : supposons qu'un investisseur américain détient 1.000 unités de devises étrangères au temps 0. Deux possibilités existent pour obtenir des dollars à la fin de la période d'investissement T :

- Investir les 1.000 unités de devises étrangère au taux rf et vendre le produit de placement à terme au prix $F_0$.

- Convertir immédiatement les 1.000 unités de devises étrangères au taux au comptant et placer les dollars au taux domestique r.

En absence d'opportunités d'arbitrage, ces deux possibilités sont équivalentes :

$$\begin{aligned} 1.000 e^{r_f T} F_0 &= 1.000 S e^{rT} \\ &\Rightarrow F_0 = S e^{(r-r_f)T} \end{aligned}$$

**– Exemple numérique :**

Supposons que les taux sans risque à 2 ans en Australie (rf) et aux USA (r) soient respectivement de 5% et 7% et que le taux de change au comptant est de 1AUD = 0, 6200USD. Le taux forward à 2 ans doit être égal à :

$$F_0 = 0,6200 \times e^{(0{,}07-0{,}05)\times 2} = 0,6453$$

Si le taux forward est supérieur ou inférieur à 0, 6453, il y aura des opportunités d'arbitrage.

– Supposons que le taux forward est 1AUD = 0, 6300USD, un arbitragiste peut :

- Emprunter 1.000AUD au taux de 5% pour 2 ans et les convertir immédiatement en USD au taux spot,
- Investir les USD obtenus au taux de 7% pour 2 ans,
- Prendre une position longue sur un contrat forward pour acheter des AUD nécessaires au remboursement de l'emprunt effectué en AUD.

En agissant ainsi, l'arbitragiste réalise un profit sans risque de 20, 91USD.

| | Aujourd'hui | 2 ans plus tard |
|---|---|---|
| Emprunter $1.000AUD$ à 5% pour 2 ans | | $1000 \times e^{0,05\times 2} = 1.105,17AUD$ |
| Vendre $1.000AUD$ au taux comptant | $1000 \times 0,62 = 620USD$ | |
| Investir $620USD$ à 7% pour 2 ans | $-620USD$ | $620 \times e^{0,07\times 2} = 713,17USD$ |
| Acheter un contrat forward à $0,6300$ | | $1.105,17 \times 0,63 = -692,26USD$ |
| Profit | 0 | $713,17 - 692,26 = 20,91USD$ |

– Supposons que le taux forward est 1AUD = 0, 6600USD, un arbitragiste peut :

- Emprunter 1.000USD à 7% pour 2 ans et les convertir immédiatement en AUD au taux spot,

- Investir les AUD obtenus au taux de 5% sur 2 ans,

- Prendre une position courte sur un contrat forward pour vendre les AUD investis au bout de 2 ans,

En agissant ainsi, l'arbitragiste réalise un profit sans risque de 26, 20USD.

| | Aujourd'hui | 2 ans plus tard |
|---|---|---|
| Emprunter $1.000USD$ à 7% pour 2 ans | | $1.000 \times e^{0,07\times 2} = -1.150,27USD$ |
| Vendre $1.000USD$ au taux comptant | $1.000 \times \frac{1}{0,62} = 1.612,90AUD$ | |
| Investir $1.612,90AUD$ à 5% pour 2 ans | $-1.612,90AUD$ | $1.612,90 \times e^{0,05\times 2} = 1.782,53AUD$ |
| Vendre un contrat forward à $0,6600$ | | $1.782,53 \times 0,66 = 1.176,47USD$ |
| Profit | 0 | $1.176,47 - 1150.27 = 26,20USD$ |

## 9. Contrats futures sur matières premières

– Nous allons tout d'abord considérer les contrats futures sur matières premières qui sont des actifs d'investissement comme l'or et l'argent avec coûts de stockage et sans revenus intermédiaires. Les coûts de stockage peuvent être interprétés comme des revenus négatifs dus à la détention de l'actif.

- Si U désigne la valeur actuelle des coûts de stockage, le prix futures est donné par :

$$F_0 = (S_0 + U)\, e^{rt}$$

- Si u désigne les coûts de stockage annuel en pourcentage du prix au comptant (ils peuvent être analysés comme un taux de rendement négatif), le prix futures est donné par :

$$F_0 = S_0\, e^{(r+u)T}$$

- Certaines matières premières sont essentiellement des actifs de consommation et les arguments d'arbitrage doivent être maniés avec prudence. Supposons qu'on a l'inégalité suivante :

$$F_0 \leq (S_0 + U) \times e^{rT}$$
$$ou\ F_0 \leq S_0 e^{(r+u)T}$$

Pour les matières premières ou marchandises qui ne jouent pas le rôle d'actifs d'investissement, le raisonnement d'arbitrage ne tient plus. En effet, les entreprises qui utilisent cette matière première ou cette marchandise dans leur activité ne seront pas prêtes à vendre leurs stocks pour réaliser l'arbitrage, simplement parce que les contrats forwards qui seraient achetés ne permettent pas de continuer la production, contrairement à l'actif sous-jacent. Ainsi, la détention d'une matière première procure des avantages que ne donnent pas les forwards et les futures. Le stockage permet la poursuite du processus de production et protège, dans une certaine mesure, contre les pénuries. Cet avantage lié à la détention de la matière première est appelé rendement de détention ou "convenience yield" et il est noté y. Ainsi :

$$F_0 = (S_0 + U) \times e^{(r-y)T}$$

$$F_0 = S_0 e^{(r+u-y)T}$$

Pour les actifs d'investissement y = 0

## Références bibliographiques


Cox, J. C., J. E. IngersoLL et S. A. Ross, « The Relation between Forward Prices and Futures Prices », Jourmal of Financial Economics, 9 (décembre 1981), 321-46 .

Ghon R. S. et R. P. Chang, « Intra-Day Arbitrage in Foreign Exchange and Eurocurrency Markets », Journal of Finance, 47, 1 (1992), 363-80 .

Jarrow R. A. et G. S. Oldfield, « Forward Contracts and Futures Contracts », Journal of Financial Economics, 9 (décembre 1981), 373-82 .

Kane E. J., « Market Incompleteness and Divergences between Forward and Futures Interest Rates », Jourmal of Fmance, 35 (mai 1980), 221-34 .

Richard S. et M. Sundaresan, « A Continuous-Time Model of Forward and Futures Prices in a Multigood Economy », Journal of Financial Economics, 9 (décembre 1981), 347-72 .

Routledge B. R., D. J. SeppI et C. S. Spatt, « Equilibrium Forward Curves for Commodities », Journal of Finance, 55, 3 (2000), 1297-1338.

Hull, J. C., 2011, Options, futures et autres actifs dérivés, 6ème Edition, Pearson Canada

Mamoughli Chokri, Risques et marchés financiers , Support de cours IFID, 2008.

Tjomb Bell , Maitriser les produits dérivés en partant de zéro, Amazone, 2015

LEFORT E ., Spéculer sur les indices boursiers et les contrats futures, Collection CITY &YORK, Paris, 2006.

## Série d’exercices

## Questions théoriques

- Quelle est la différence entre position ouverte et volume de transaction ?
- Quelle est la différence entre un prix forward et la valeur d’un contrat forward ?

**Exercice 1**

Vous prenez une position longue sur un forward 6 mois portant sur une action ND quand l’action cote 30 €, et le taux sans risque continu est de 12% par an. Quel est le prix forward ?

**Exercice 2**

Un indice vaut aujourd’hui 350 . Le taux sans risque est de 8% et le rendement en dividendes 4%. Quel est le prix futures théorique pour T = 4 mois ?

**Exercice 3**

Une position longue sur un forward à un an sur une action ND est prise quand l’action cote 40 € et le taux sans risque est de 10 % ( en continu ).

- Quelle le prix forward et quelle est la valeur initiale du contrat ?
- Six mois plus tard , l’action cote 45 € et la taux sans risque est toujours 10%. Quel est le prix forward et quel est la valeur du contrat ?

**Exercice 4**

Le taux sans risque est 10% et le rendement en dividendes d’un indice est 4 % . L’indice vaut 400 et le prix futures à 4 mois est 405. Quelles sont les opportunités d’arbitrage ?

**Exercice 5**

Une action se vend actuellement à 75$ et doit payer un dividende de 1,20$ dans 4 mois et un autre de 1,50$ dans 10 mois. Le taux d’intérêt sans risque est de 7,5% par an pour toutes les maturités, capitalisé en continu.

Un investisseur prend une position longue sur un contrat futures à 1 an sur cette action

1- Calculez le prix futures à la date d’aujourd’hui
2- Supposez que l’investisseur dénoue sa position 6 mois plus tard et réalise un profit de 5$. Déterminez le prix de l’action dans 6 mois.

## III. Stratégies de couverture par les contrats futures

De nombreux intervenants sur les marchés de futures sont des opérateurs de couverture. Leur objectif est d'utiliser les contrats futures pour réduire le risque auquel ils sont confrontés. Ce risque peut être lié au prix du pétrole, au cours d'une devise, à la valeur d'un indice, etc. Une couverture est dite parfaite si elle permet d'éliminer complètement le risque. Ainsi, il est rarement possible d'obtenir ce type de protection sur les marchés, et l'analyse des méthodes de couverture consiste à définir les principes permettant la construction de stratégies dont les résultats sont aussi proches que possible de ceux d'une couverture parfaite.

Dans cette partie, nous étudierons les différentes possibilités d'utilisation des contrats futures dans le but de couvrir une position. Quelle quantité de contrats permet la meilleure réduction du risque ? A ce stade, nous focalisons sur les stratégies statiques, c'est-à-dire nous n'envisageons pas la possibilité d'ajustement de la position pendant la période de couverture. Nous aborderons les stratégies dynamiques dans lesquelles la position est sous constante surveillance et peut subir des ajustements dans le chapitre suivant.

### 1. Types de couverture

Quand un individu ou une entreprise prennent une position de couverture sur un marché de futures, il s'agit en général d'éliminer, ou du moins de réduire considérablement un risque. Nous distinguons 2 types de couverture : les positions courtes ou short hedges et les positions longues ou long hedges.

#### 1.1.Positions courtes

Une couverture courte est appropriée dans deux situations possibles :

- Le hedger détient l'actif sous-jacent au contrat et prévoit de le vendre dans un avenir plus ou moins proche. Par exemple, un agriculteur qui cultive du mais et qui se prépare à vendre sa récolte dans deux mois peut choisir une couverture de ce type.

- Le hedger ne détient pas encore l'actif, mais doit le recevoir dans les mois à venir. Par exemple, un exportateur français qui doit recevoir des USD dans 3 mois peut avoir un manque à gagner si, d'ici là, l'USD se déprécie par rapport à l'euro. Une position courte sur un contrat futures sur USD peut assurer un taux de change pour la conversion future des dollars en euro.

**Exemple de couverture courte**

Considérons un producteur de pétrole qui, le 15 mai, vient de conclure un contrat pour la livraison d'un million de barils le 15 août au prix prévalant sur le marché à cette date. Le prix futures à 3 mois coté sur le New York Mercantile Exchange (NYMEX) est de 18, 758 le baril. Sachant que chaque contrat porte sur 1.000 barils, le producteur décide de couvrir sa position en vendant 1.000 contrats échéance août et de dénouer sa position le 15 août. Quels sont les revenus possibles de la vente du pétrole sur le marché spot le 15 août combinée avec la position courte sur les futures ?

| | Scénario 1 | Scénario 2 |
|---|---|---|
| Prix du brut au comptant le 15 août | $17,50\$$ | $19,50\$$ |
| Prix de livraison du contrat futures | $18,75\$$ | $18,75\$$ |
| Profit/perte de la couvreture courte | $(18,75\$ - 17,50\$)$ $= 1,25\$$ | $(18,75\$ - 19,50\$)$ $= -0,75\$$ |
| Prix de vente du pétrole sur le marché spot | $17,50\$$ | $19,50\$$ |
| **Résultat de la vente et de la couverture** | $\mathbf{18,75\$}$ | $\mathbf{18,75\$}$ |

Remarque : Etant donné que le 15 août se situe dans le mois de livraison du contrat futures, le prix futures sera à ce moment très proche du prix spot.

### 1.2. Positions longues

Une couverture longue est appropriée quand le hedger sait qu'il va acheter l'actif dans l'avenir et veut fixer le prix d'achat dès aujourd'hui. C'est le cas par exemple, d'une compagnie aérienne qui doit acheter le brut dans 6 mois et veut fixer le prix d'achat dans l'avenir ou le cas d'un importateur qui sait qui doit payer la marchandise en devise étrangère dans un avenir proche et veut fixer dès aujourd'hui le taux de change.

### Exemple de couverture longue

Supposons, qu'à la date du 15 janvier, une entreprise doit acheter 100.000 livres de cuivre le 15 mai pour son processus de production. A la date du 15 janvier, le prix spot du cuivre est de 140 cents la livre et le prix futures d'un contrat échéance mai est de 120 cents la livre. Le fabricant décide de couvrir sa position en prenant une position longue sur 4 contrats futures sur le cuivre échéance mai, sachant que chaque contrat porte sur 25.000 livres de cuivre, et de dénouer sa position le 15 mai. Quels sont les revenus possibles de l'achat du cuivre sur le marché spot le 15 mai combiné avec la position longue sur les futures ?

| | Scénario 1 | Scénario 2 |
|---|---|---|
| Prix du cuivre au comptant le 15 mai | $1,25\$$ | $1,05\$$ |
| Prix de livraison du contrat futures | $1,20\$$ | $1,20\$$ |
| Profit/perte de la couvreture longue | $(1,25\$ - 1,20\$)$ $+0,05\$$ | $(1,05\$ - 1,20\$)$ $-0,15\$$ |
| Prix d'achat du cuivre sur le marché spot | $-1,25\$$ | $-1,05\$$ |
| **Résultat de l'achat et de la couverture** | $\mathbf{-1,20\$}$ | $\mathbf{-1,20\$}$ |

Remarque : Etant donné que le 15 mai se situe dans le mois de livraison du contrat futures, le prix futures sera à ce moment très proche du prix spot.

- Il est à noter qu'il vaut mieux acheter le cuivre à terme par l'intermédiaire d'un futures que de l'acheter au comptant en janvier, puisque le prix spot est de 140 cents, auxquels il convient d'ajouter le coût de stockage jusqu'en mai et les intérêts à payer liés au financement de l'achat. Toutefois, pour une entreprise qui utilise d'une manière habituelle le cuivre dans son processus de production, le prix spot plus élevé est compensé par l'avan- tage consistant à détenir le produit physique plutôt que le futures. En effet, elle pourra en avoir besoin plus tôt et ne craint pas une quelconque pénurie.
- Prendre une position longue peut être justifiée par la volonté d'annuler une position courte prise précédemment. Losrqu'un investisseur vend à découvert une action il peut couvrir sa position en prenant une position longue sur un futures sur indice
- Ces divers exemples supposent que la position est dénouée pendant le mois de livraison du contrat. La couverture a donc le même effet que si la livraison associée au contrat était réellement réalisée. Mais en général ce n'est pas le cas car la livraison est coûteuse. Le plus souvent, les hedgers en position longue évitent cette livraison en dénouant leur position sur le contrat avant la période de livraison.
- La performance de couverture est peu affectée par la distinction entre les contrats forward et les contrats futures. Etant donné, que les contrats futures engendrent des flux quotidiens alors que les contrats forward donnent lieu à un seul flux terminal.

## 2. Risque de base

Les exemples précédents sont presque trop beaux pour être vrais. Le hedger était capable d'identifier la date précise à laquelle l'actif sous-jacent devrait être acheté ou vendu. Il pouvait utiliser des contrats futures qui permettaient d'éliminer entièrement le risque de variation de prix. En pratique, c'est généralement mois simple, pour les raisons suivantes :

- L'actif dont les variations de prix doivent être couvertes n'est pas forcément le même que le sous-jacent du contrat futures.

- Le hedger peut ne pas connaître avec exactitude la date à laquelle il devra acheter ou vendre l'actif.

- La stratégie de couverture peut éventuellement imposer de dénouer la position sur les contrats futures bien avant leur échéance.

Ces différents éléments donnent naissance au risque de base.

### 2.1.Définition de la base

La base est définie comme la différence entre le prix au comptant de l'actif à couvrir et le prix futures du contrat utilisé pour la couverture. Si l'actif à couvrir et le sous-jacent du contrat futures coïncident, la base sera nulle à l'échéance du contrat, mais avant cette date elle peut être positive ou négative. Le risque de base découle de l'incertitude sur la base au moment ou la position de couverture est dénouée.

Nous utilisons la notation suivante :

– S1 : Le prix spot initial à la date t1

– S2 : Le prix spot final à la date t2

– F1 : Le prix futures initial à la date t1

– F2 : Le prix futures final à la date t2

– b1 : La base à la date t1

– b2 : La base à la date t2

Nous supposons qu'une couverture est mise en œuvre à la date t1 et dénouée à la date t2.

Considérons l'exemple suivant : Quand la couverture est mise en œuvre, nous avons :

$$S1 = 2,508 \text{ et } F1 = 2,208$$

Quand la position est dénouée :

$$S2 = 2,008 \text{ et } F2 = 1,908$$

Ainsi, la base est égale à :

$$\begin{aligned} b1 &= S1 — F1 = 0,308 \\ b2 &= S2 — F2 = 0,108 \end{aligned}$$

Analysons tout d'abord la situation d'un hedger qui prend une position longue sur le contrat futures en t1 car il sait qu'il doit acheter le sous-jacent en t2. Le prix d'achat de l'actif sera S2 et le gain ou la perte sur le contrat futures sera égal à 52 -51. Le prix effectivement payé pour une unité de l'actif sous-jacent acheté est :

$$\begin{aligned} - S2 + (F2 — F1) &= - (F1 + b2) \\ &= - (2,20 + 0,10) = - 2,30 \end{aligned}$$

La valeur de F1 est connue dès la date t1, si b2 est connu avec certitude au temps t1 nous obtenons une couverture parfaite. Toutefois, la valeur de b2 ne sera observée qu'en t2, c'est ce qui engendre le risque de base.

– Pour des actifs d'investissement comme les devises, les indices, l'or ou l'argent, le risque de base est en général inférieur à celui supporté sur les matières premières. Le risque de base vient essentiellement de l'incertitude quant à l'évolution du taux sans risque.

– Pour un actif de consommation, les déséquilibres entre offre et demande, combinés à des difficultés de stockage éventuelles, peuvent largement faire varier le rendement de détention et donc la base. Le risque de base d'en trouve augmenté dans ce cas.

Il est à noter que si l'actif à couvrir est différent de l'actif sous-jacent au contrat future, le risque de base est généralement plus important. Notons S2* le prix del'actif sous-jacent au contrat futures à la date t2. S2 correspond toujours au prix de l'actif à couvrir à la date t2. L'investisseur se couvre comme précédemment, le prix effectivement payé pour acheter l'actif est :

$$S_2 + (F_1 - F_2) = F_1 + b_2$$

que l'on peut réécrire :

$$F_1 + (S_2^* - F_2) + (S_2 - S_2^*)$$

Les termes (S2*- F2) et (S2 -S2*) sont les deux composantes de la base.

- (S2* - 52) est la base qui serait observée si l'actif sous-jacent au contrat était le même que l'actif négocié.

- (S2 — S2*) traduit la différence entre les deux actifs. Ce terme existe si l'actif à couvrir est différent de l'actif sous-jacent au contrat futures.

**2.2. Choix du contrat**

Un des facteurs clés qui affecte le risque de base est le choix du contrat futures à utiliser pour la couverture. Ce choix dépend de 2 composantes :

- Choisir l'actif sous-jacent du contrat parmi les contrats disponibles : Quand l'actif à couvrir est disponible comme support de contrat il n'y a aucun problème. Quand ce n'est pas le cas, il faut sélectionner le contrat dont le prix futures est le plus corrélé avec le prix de l'actif à couvrir. C'est ce qu'on appelle la couverture croisée.

- Choisir le mois de livraison : Dans les exemples précédents, nous avons retenu le mois de livraison contenant la date à laquelle l'actif sera acheté ou vendu. Ceci est assez risqué car les prix futures ont parfois des comportements erratiques pendant le mois de livraison. De plus, quand la période de livraison est le mois entier, un hedger avec une position longue peut se voir obligé de prendre livraison s'il possède encore le contrat au début de cette période, ce qui n'est pas forcément son objectif. D'une manière générale, puisque le risque de base augmente avec la durée de vie résiduelle du contrat à la date de clôture de la position de couverture, la règle consiste à choisir le mois de livraison la plus proche mais ultérieure au mois qui contient la date de clôture souhaitée de la position de couverture. Si pour un contrat donné, les échéances disponibles sont mars, juin, septembre et décembre, on choisira le contrat mars pour les couvertures dont l'horizon se situe en décembre, janvier et février, le contrat de juin pour les couvertures dont l'horizon est mars, avril et mai et ainsi de suite. Bien sûr cette règle suppose une liquidité suffisante sur les marchés des différents contrats.

**Exemples numériques**

**– Exemple 1 :**

Le 1er mars, une entreprise américaine s'attend à recevoir 50 millions de yens de l'un de ses clients japonais à la fin du mois de juillet. Les mois de livraison les contrats futures sur le yen sont mars, juin, septembre et décembre et chaque contrat porte sur 12, 5 millions de JP Y. L'entreprise décide de se couvrir en prenant une position courte sur 4 contrats échéance septembre. A la fin du mois de juillet, quand l'encaissement arrive, la position de couverture est dénouée par le rachat de quatre contrats. Supposons que le 1er mars le prix futures échéance septembre est de F1 = 0, 7800 cents et à la fin du mois de juillet les prix spot et futures échéance septembre sont respectivement S2 = 0, 7200 cents et F2 = 0, 7250 cents. Le prix effectivement reçu suite à la vente des yens et à la couverture est :

S2 + (F1 — F2) = F1 + b2
= 0, 7200 + (0, 7800 — 0, 7250)
= 0, 78 + (—0, 0050) = 0, 7750

Par conséquent, le montant total reçu en dollars est égal à :

50.000.000 × 0, 00775 = 387.500

**3. Ratio de couverture optimal**

Le ratio de couverture est le rapport de la taille de la position à prendre sur le marché futures pour couvrir une position et de la taille de la position sur l'actif à couvrir. Pour l'instant, nous avons toujours utilisé un ratio de 1. Par exemple, l'exposition au risque concernait 20.000 barils de pétrole et la position sur les futures correspondait exactement à cette quantité. Toutefois, en pratique la minimisation du risque par le hedger fait que le ratio de couverture n'est pas toujours égal à 1 surtout quand la couverture croisée est utilisée. Le ratio de couverture doit minimiser le risque de la position du hedger. Ainsi, la proportion de l'exposition qui doit être couverte de façon optimale est égale à :

$$h^* = \rho \frac{\sigma_S}{\sigma_F}$$

avec :

- h* : Ratio de couverture qui minimise le risque de la position du hedger.
- $\sigma_S$ : Ecart-type de ΔS qui correspond à la variation du prix spot pendant la période de couverture.
- $\sigma_F$ : Ecart-type de ΔF qui correspond à la variation du prix futures pendant la période de couverture.
- p : Coefficient de corrélation entre ΔS et ΔF.

D'une manière générale, le ratio optimal sera la pente de la droite de régression de ΔS sur ΔF. Si ΔF est deux fois plus volatile que ΔS et si la corrélation est parfaite, le ratio sera égal à 0, 5, ce qui s'explique intuitivement puisque les variations de F sont deux fois plus importantes que celles de S.

Le nombre optimal de contrats futures à détenir pour assurer une couverture optimale est :

$$N^* = h^* \frac{N_A}{Q_F}$$

avec :

- $N_A$ : Taille de la position à couvrir (en unités).
- $Q_F$ : Taille d'un contrat futures (en unités).

**Exemple numérique**

Une compagnie aérienne doit acheter 2 millions de galons de kérosène dans un mois et décide de se couvrir par des contrats futures sur le fuel domestique. Le tableau suivant donne pour 15 mois consécutifs, les variations de ΔS (kérosène) et ΔF (fuel domestique) en USD par galon :

| Mois | Variations du prix futures | Variation du prix du kérosène |
|---|---|---|
| 1 | 0,021 | 0,029 |
| 2 | 0,035 | 0,020 |
| 3 | -0,046 | -0,044 |
| 4 | 0,001 | 0,008 |
| 5 | 0,044 | 0,026 |
| 6 | -0,029 | -0,019 |
| 7 | -0,026 | -0,010 |
| 8 | -0,029 | -0,007 |
| 9 | 0,048 | 0,043 |
| 10 | -0,006 | 0,011 |
| 11 | -0,036 | -0,036 |
| 12 | -0,011 | -0,018 |
| 13 | 0,019 | 0,009 |
| 14 | -0,027 | -0,032 |
| 15 | 0,029 | 0,023 |

Chaque contrat futures porte sur 42.000 galons. En utilisant excel, nous pouvons effectuer les calculs suivants :

- Ecarts-types : $\sigma S = 0,0263$ et $\sigma F = 0,0313$

– Corrélation : p = 0, 9284

- **Ratio de couverture optimal** : $h^* = 0,9284 \times \frac{0,0263}{0,0313} = 0,7777$
- **Nombre optimal de contrats** : $N^* = 0,7777 \times \frac{2,000,000}{42,000} = 37,03 \simeq 37$ contrats.

## 4. Couverture en utilisant les futures sur indices

Les contrats futures sur indice sont utilisés pour couvrir un portefeuille d'actions.

- Si le portefeuille duplique exactement l'indice, le ratio de couverture est éagl à 1 et le nombre optimal de contrat à détenir est :

$$N^* = \frac{P}{A}$$

avec :

(a) P : La valeur du portefeuille aujourd'hui.

(b) A : La valeur des titres composant l'indice sous-jacent au contrat.

- Quand le portefeuille ne duplique pas exactement l'indice, ce qui est le cas le plus courant, on peut utiliser le $\beta = Cov(RM, RP)/ Var(RM)$ du portefeuille (donné par le MEDAF) pour déterminer la couverture optimale. Le nombre optimal de contrats à détenir est :

$$N^* = \beta\frac{P}{A}$$

Cette relation suppose que la maturité du contrat est proche de celle de la couverture ; elle ignore également le marking to market quotidien sur le contrat.

**Exemple numérique**

Supposons que la valeur de l'indice S&P 500 est de 1.000, la valeur du portefeuille est de 5.000.000 $, le taux sans risque est de 10% par an, le taux de dividende sur l'indice est de 4% et le béta du portefeuille est $\beta = 1, 5$. Nous allons utiliser un contrat futures sur le S&P 500 venant à échéance dans 4 mois pour couvrir notre position sur le portefeuille pour les 3 prochains mois. Chaque contrat futures porte sur 250 $ fois l'indice. Actuellement, le prix du contrat futures est égal à :

$$S_0 e^{(r-q)T} = 1.000 \times e^{(0{,}1-0{,}04)\times\frac{4}{12}} = 1.020, 20\$$$

Le nombre optimal de contrats futures à vendre pour couvrir cette position est :

$$N^* = \beta\frac{P}{A} = 1,5 \times \frac{5.000.000}{250 \times 1.000} = 30$$

Supposons que l'indice chute à 900 3 mois plus tard, le prix futures sera à ce moment égal à :

$$900\$ \times e^{(0{,}1-0{,}04)\times\frac{1}{12}} = 904, 51\$$$

Le gain réalisé sur la position courte sur les contrats futures est :

$$30 \times (1.020, 208 — 904, 518) \times 250 = 867.675, 538$$

La perte sur l'indice est de 10% (de 1.000 à 900) et le rendement en dividende de l'indice est approximativement de 1% sur 3 mois (4% par an), par conséquent la rentabilité sur l'indice est de —9%. De plus, le taux sans risque est approximativement de 2, 5% par trimestre. Le rendement espéré du portefeuille donné par l'équation du CAPM est égal à :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(R_P\right) &= r+\beta\left[\mathrm{E}\left(R_M\right)-r\right] \\ &= 2,5\%+1,5\times(-9\%-2,5\%)=-14,75\% \end{aligned}$$

La valeur espéré du portefeuille est donc :

5.000.000 × (1 — 0, 1475) = 4.262.500 $

La valeur espérée finale de la position couverte est alors égale à :

4.262.500 + 867.676 = 5.130.176 $

Le tableau ci-dessous donne les résultats de couverture pour diverses valeurs de l'indice.

| Valeur du S&P 500 dans 3 mois | 900 | 950 | 1.000 | 1.050 | 1.100 |
|---|---|---|---|---|---|
| Prix futures de l'indice aujourd'hui | 1.020,2 | 1.020,2 | 1.020,2 | 1.020,2 | 1.020,2 |
| Prix futures de l'indice dans 3 mois | 904,51 | 954,76 | 1.005,01 | 1.055,26 | 1.105,51 |
| Gain (perte) sur les contrats futures | 867.676$ | 490.796$ | 113.916$ | (262.964$) | (639.843$) |
| Rendement sur l'indice | -9% | -4% | 1% | 6% | 11% |
| Rendement espéré du portefeuille | -14,75% | -7,25% | 0,25% | 7,75% | 15,25% |
| Valeur du portefeuille incluant les dividendes | 4.262.500$ | 4.637.500$ | 5.012.500$ | 5.387.500$ | 5.762.500$ |
| Valeur totale de la position dans 3 mois | 5.130.176$ | 5.128.296$ | 5.126.416$ | 5.124.536$ | 5.122.657$ |

La valeur de la position est très stable, pratiquement indépendante de la valeur de l'indice. Ce tableau suppose que le taux de dividende dans les trois mois est connu, que le taux sans risque est constant et que la rentabilité du portefeuille est parfaitement corélée à celle de l'indice. Ces hypothèses ne sont pas vérifiées en pratique et les résultats seront en général moins parfaits que ceux illustrés ici.

**4.2.Pourquoi couvrir un portefeuille d³actions ?**

Le tableau ci-dessus montre que le portefeuille couvert gagne approximativement le taux sans risque sur 3 mois soit 2, 5%. La couverture a justement pour objectif de faire progresser la valeur du portefeuille au rythme du taux sans risque. Alors pourquoi se couvrir de cette façon ? Il suffirait de liquider le portefeuille et d'investir la somme obtenue au taux sans risque pendant 3 mois. La raison est que le gérant peut avoir, pour des raisons diverses, un horizon d'investissement long mais souhaite une protection à court terme. La stratégie alternative consistant à se débarasser provisoirement du portefeuille est très lourde en termes de coûts de transaction explicites et implicites (liés à la liquidité du marché).

### 4.3 Changer le bêta d³un portefeuille

Dans l'exemple précédent, le bêta de la position devient nul après la mise en place de la couverture, la valeur du portefeuille croît approximativement au taux sans risque. Parfois, les contrats futures sont utilisés pour simplement modifier le bêta d'une position sans forcément amener celui-ci à zéro. D'une manière générale, pour faire passer le bêta d'une valeur β à une valeur β×, il faut prendre une :

$$\begin{aligned}\text{Courte sur } N^* &= (\beta - \beta^*)\,\frac{P}{A} \text{ contrats si } \beta > \beta^* \\ \text{Longue sur } N^* &= (\beta^* - \beta)\,\frac{P}{A} \text{ contrats si } \beta < \beta^*\end{aligned}$$

- Quelle est la position à prendre pour faire passer le bêta du portefeuille précédent de β = 1, 5 à β* = 0, 75 ?

$$\text{Vendre } N^* = (1,5 - 0,75) \times \frac{5.000.000}{250 \times 1.000} = 15$$

– Quelle est la position à prendre pour faire passer le bêta du portefeuille précédent de β = 1, 5 à β* = 2 ?

$$\text{Acheter } N^* = (2 - 1,5) \times \frac{5.000.000}{250 \times 1.000} = 10$$

**4.3.Couverture du prix d³une action individuelle**

La construction d'une couverture contre les variations du prix d'une action individuelle repose sur les mêmes principes. Il n'existe pas toujours de contrats futures sur actions ; Eu- ronext.Liffe propose cependant depuis 2001 des contrats futures sur actions européennes et américaines. Quand seuls les contrats sur indice sont diponibles, le raisonnement en termes de bêta doit être reconduit. L'action doit être considérée comme un portefeuille avec 100% de poids investi dans une seule action. Le nombre optimal de contrats futures doit être égal à :

$$N^* = \beta\frac{P}{A}$$

– β : est le bêta de l'action.
– P : est la valeur totale des actions détenues.
– A : est la valeur actuelle des actions sous-jacentes à un contrat futures sur indice.

Il est cependant important de garder à l'esprit qu'en dépit d'une méthode identique, le résultat obtenu est nettement moins bon vu que le portefeuille avec une seule action n'est pas bien diversifié. En effet, la couverture protège contre les mouvements du marché (le risque systématique) mais pas contre les variations spécifiques de l'action. Le risque spécifique qui constitue une part importante du risque total de l'action reste non couvert.

**Exemple numérique**

Supposons un investisseur qui détient en juin 20.000 actions IBM. Chaque action vaut 100 $. L'investisseur décide d'utiliser les contrats futures sur le S&P 500 échéance août pour couvrir sa position durant 1 mois. Actuellement, le prix futures de ce contrat est de 908. Chaque contrat porte sur 250 $ la valeur de l'indice. Le niveau de l'indice au mois de juin est de 900 et le bêta de l'action IBM est estimé à 1,1. Le nombre de contrats à vendre pour couvrir cette position est égal à :

$$N^* = 1,1 \times \frac{20.000 \times 100\$}{900 \times 250\$} = 1,1 \times \frac{2.000.000}{225.000} = 9,78 \simeq 10.$$

Supposons que le prix de l'action IBM augmente durant 1 mois et passe à 125 $ et que le prix futures augmente également et passera à 1080. Le résultat sur le marché au comptant sera :

20.000 × (125 $ - 100 $) = 500.000 $

Le résultat sur le marché futures sera :

10 × 250 $ × (908 — 1080) = - 430.000$

La valeur effective de la position après 1 mois est égale à :

500.000$ — 430.000$ = 70.000$

**4.5. Couverture glissante**

Dans certaines situations, la durée de la couverture souhaitée dépasse la maturité des contrats futures dipsonibles. Dans ce cas, le hedger doit faire glisser sa couverture d'une échéance à l'autre. Considérons une entreprise qui doit recevoir, en date T , un certain montant pour une vente d'actifs et qui souhaite se couvrir. Elle peut utiliser n contrats successifs avec des dates d'échéance croissantes (certains de ces contrats n'étant pas encore négociés aujourd'hui) de la manière suivant :

Date $t_0$ : position courte sur le contrat 1
Date $t_1$ : dénouer la position sur le contrat 1
Position courte sur le contrat 2
⋮
Date $t_n$ : dénouer la position sur le contrat $n-1$
Position courte sur le contrat $n$
Date $T$ : dénouer la position sur le contrat $n$.

Dans cette stratégie, il y a n risques de base. A la date T, l'incertitude se traduit par la différence entre le prix futures du contrat n et le prix spot de l'actif à couvrir. De plus, à chaque date intermédiaire, il y a une incertitude sur la différence entre le prix futures du contrat dénoué et celui du contrat sur lequel est prise la nouvelle position : il s'agit d'une base glissant "Rollover Basis". Bien sûr le hedger dispose d'une certaine marge de manœuvre concernant les dates auxquelles il passe d'un contrat au contrat suivant et peut chercher à minimiser ce risque de base glissante.

**Références bibliographiques**

Allayanis G. et J. Weston, « The Use of Foreign Currency Derivatives and Firm Market Value », Review of Financial Studies, 14, 1 (printemps 2001), 243-76 .

Bodnar G. M., G. S. Hayt et R. C. Marston, « 1998 Wharton Survey of Financial Risk Management by U.S Non Financial Firms », Financial Management, 2, 4 (1998), 70-91,

Brown G. W., « Managing Foreign Exchange Risk with Derivatives », Journal of Financial Economics, 60 (2001), 401-48 .

Culp C. et M. H. Miller, « Metallgesellschaft and the Economics of Synthetic Storage ».Journal of Applied Corporate Finance, 7, 4 (hiver 1995), 62-76.

Ederington L. H., « The Hedging Performance of the New Futures Markets », Journal of Finance, 34 (mars 1979), 157-70 .

Edwards F. R. et M. S. Canter, « The Collapse of Metallgesellschaft : Unhedgeable Risks, Poor Hedging Strategy, or Just Bad Luck? », Journal of Applied Corporate Finance, 8, 1 (printemps 995), 86-105.

Geczy C. B. A. Minton et C. Schrand, « Why Firms Use Currency Derivatives ? », Journal ofFinance, 52, 4 (1997), 1323-54.

Graham J. R. et C. W. Smith Jr, « Tax Incentives to Hedge », Journal of Finance, (1999), 2241-62.54, 6

Haushalter G. D., « Financing Policy, Basis Risk, and Corporate Hedging : Evidence from Oil and Gas Producers », Journal of Finance, 55, 1 (2000), 107-52 .

Mello A. S. et J. E. Parsons, « Hedging and Liquidity », Review of Financial Studies, 13(printemps 2000), 127-53 .

Neuberger A. J., « Hedging Long-Term Exposures with Multiple Short-Term FuturesContracts ». Review of Financial Studies, 12 (1999), 429-59 .

Petersen M. A. et S. R. ThiaGarAJan, « Risk Management and Hedging : With and Without Derivatives », Financial Management, 29, 4 (hiver 2000), 5-30.

Hull, J. C., 2011, Options, futures et autres actifs dérivés, 6ème Edition, Pearson Canada

Mmoghli Chokri , Risques et marchés financiers , Support de cours IFID, 2008.

Tjomb Bell , Maitriser les produits dérivés en partant de zéro, Amazone, 2015

LEFORT E ., Spéculer sur les indices boursiers et les contrats futures, Collection CITY &YORK, Paris, 2006.

Chicago Board of trade (CBOT), Trading in futures an introduction,. Supports de formations professionnelles.

## Série d’exercices

### Exercice 1

L’écart type des variations mensuelles du prix au comptant d’une action XYZ est de 0,4933. L’écart type des variations mensuelles du prix futures sur cette action est de 0,4453. La corrélation entre les variations des prix futures et les variations des prix au comptant est de 0,8166. Aujourd’hui, on est le 15 octobre. Un producteur doit acheter 10.000 unités de l’action XYZ à la date du 15 novembre

1- Calculez le ratio de couverture qui minimise le risque.

2- Si la taille d’un contrat futures sur l’action XYZ est 250 unités, Quelle position doit prendre le producteur : courte vs longue et nombre de contrats?

3. Le prix futures aujourd’hui est de 5,85$ par unité. Si le prix futures quand la position est dénouée, le 15 Novembre, est 5,40$ par unité et le prix au comptant à la même date est 5,25$ par unité, quel est le coût effectif par unité? Que pensez-vous de cette couverture

### Exercice 2

Vous êtes en charge d’un portefeuille d’actions de 20.000.000$. Votre objectif est de répliquer les mouvements de l’indice S&P 500. Vous pensez que le marché sera à la baisse durant les prochains mois.

Vous décidez d’éliminer votre exposition au risque durant les trois prochains mois. Vous disposez des informations suivantes

• Taux de rendement de l’actif = 2%
• Valeur de l’indice S&P 500 aujourd’hui = 1080
• Prix futures à 4 mois sur le S & P = 1095

Nous supposons que tous les contrats futures sur le S&P 500 négociés sur le marché sont correctement évalués

1- Proposez une couverture pour éliminer le risque de marché durant les trois prochains mois.

Supposez que chaque contrat futures sur le S&P 500 correspond à 250$ fois la valeur de l’indice.

2. Quel sera le gain/perte de la position sur le contrat futures dans 3 mois si le niveau de l’indice S&P 500 augmente à 1.100 dans 3 mois? (Vous devez calculer le taux d’intérêt sans risque)

# Chapitre 5 :

# Les options

## Généralités, propriétés, Modèles d'évaluation et couverture des risques

# I- Définitions, généralités et concepts de base

**Introduction**

La théorie des options est relativement récente et date du début des années 1980. Elle offre des techniques de protection permettant de faire face à la grande volatilité des cours sur les différents marchés financiers (cours des actions, cours des obligations, cours des devises…etc) apparue à cette époque. Les domaines d'application de la théorie des options sont très vastes et de nature aussi bien macro-économique (finance de marché) que microéconomique (gestion financière de l'entreprise).

**1- Définitions**

L'option est un droit et non une obligation de réaliser l'achat ou la vente d'un actif i. L'actif support du contrat d'option, appelé actif sous-jacent, peut être de nature diverse : action, obligation, contrat à terme etc) à un prix défini à l'avance - à ou jusqu'à - une date fixée également d'avance, appelée date d ' échéance, date d'expiration ou parfois date de maturité. Si ce droit ne peut être exercé (levé) qu'à une date fixe, on parle d'option européenne. Si on peut exercer l'option à n'importe quel moment jusqu'à la date de maturité, on parle d'option américaine. Le qualificatif d'européen ou d'américain n'a rien à voir avec une quelconque localisation géographique où sont négociés ces contrats.

Une option est donc un contrat négociable dont le prix, appelé prime, est payé immédiatement par l'acheteur au vendeur qui, lui, est tenu d'acheter ou vendre l'actif sous-jacent au prix d'exercice à (éventuellement avant ) l'échéance. La prime d'une option d'achat s'appelle call, put celle d'une option de vente.

II existe des options simples, des options synthétiques construites par combinaison d'une option simple et d'une position sur le titre support, enfin des options complexes, obtenues par combinaisons d'options.

**2- Valeur des options à l'échéance : Les positions de base.**

A la date d'échéance T d'une option, celle-ci est soit abandonnée, car de valeur nulle, soit exercée par l'acheteur contre le vendeur, car de valeur positive.

Comme il existe deux types d'options et que chaque transaction fait intervenir un acheteur et un vendeur, il y a quatre positions de base, en termes de gain et de risque.

- L'Achat d'une option d'achat.

- L'Achat d'une option de vente.

- La Vente d'une option d'achat.

- La Vente d'une option de vente.

Appelons E, le prix d'exercice, c le prix d'un call, p le prix d'un put et analysons ces quatre positions de base.

**2-1) L'achat d'un call**

L'acheteur d'un call acquiert le droit d'acheter à (jusqu'à) l'échéance le titre support, au prix E, moyennant le paiement immédiat de c . Il a une opinion haussière du marché et espère que le cours du sous-jacent atteindra un niveau supérieur au prix d'exercice majoré du prémium. Si son anticipation se confirme, il pourra acheter le titre au prix convenu E, puis le revendre immédiatement en réalisant un profit. Si au contraire sa prévision est s'avère mauvaise, il subit une perte dont la valeur maximale est égale à la prime du call, puisque si le cours est inférieur au prix d'exercice, il n'exercera pas son option. On doit noter le délai qui s'écoule entre le paiement de la prime (immédiat) et le règlement de l'achat éventuel de l'actif support.

A l'échéance T, le call vaut zéro si le support a une valeur inférieure au prix d'exercice E, et vaut la différence S(T) - E dans le cas contraire. Soit formellement :

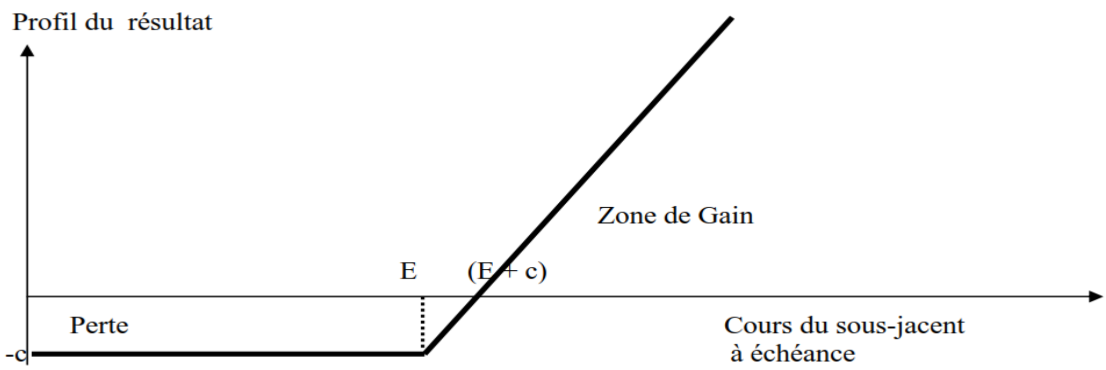
$$C(T) = \mathrm{Max}[0, S(T) - E] = [S(T) - E]^{+} = \begin{cases} 0 & \text{si } S(T) \leq E \\ S(T) - E & \text{si } S(T) > E \end{cases}$$

Dans le plan [S(T), C(T) ], la valeur du call est représentée graphiquement par le segment de droite de pente nulle se confondant avec l'axe des abscisses pour 0 < S(T) < E et la demi-droite de pente 1 partant du point (E, 0) pour S(T)> E.

Pour tracer le profil du résultat généré par le call acheté, compte tenu de l'investissement initial c, il suffit de déduire de $[S(T) - E]^{+}$ la valeur c pour obtenir :

$$\text{Résultat de l'opération} = \begin{cases} -c & \text{si } S(T) \leq E \\ S(T) - (E + c) & \end{cases}$$

Le graphique 1 donne, pour le détenteur d'une option d'achat, l'évolution de sa valeur ainsi du résultat obtenu en fonction du cours du sous-jacent à l'échéance.



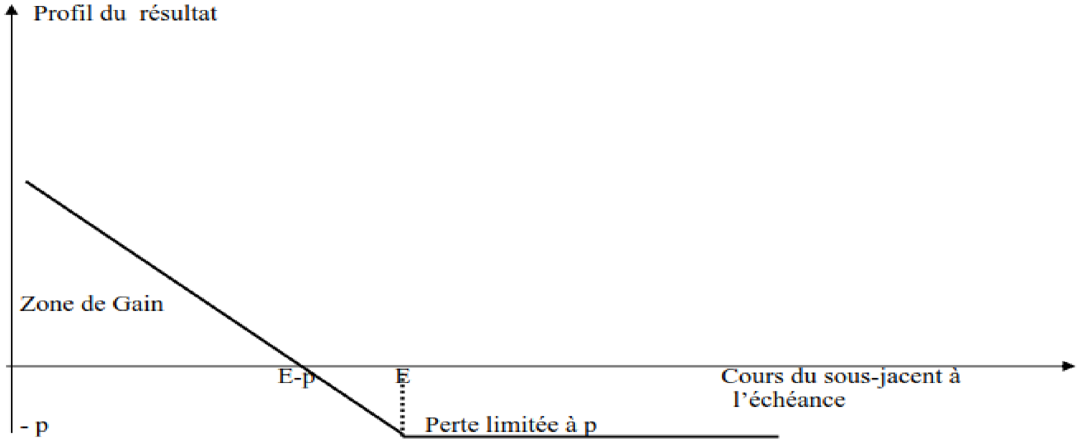

**2.2. L'achat d'un put**

L'investisseur acquiert le droit de vendre un titre au prix d'exercice E à ( jusqu'à ) l'échéance, moyennant le versement immédiat de p. L'investisseur achète une option de vente quand il anticipe une baisse du marché. Son gain se réalisera si, effectivement, le prix tombe au- dessous du prix d'exercice diminué de la prime. Si tel est le cas, il exerce son option, dans le cas contraire, il abandonne l'option et sa perte maximale est de p

$$\text{Le résultat de l'opération est} \quad \begin{cases} -p & \text{si} \quad S(T) \geq E \\ E - S(T) - p & \text{Si } S(T) \leq E \end{cases}$$

Pour $S(T) \leq E$, il s'agit d'une fonction linéaire décroissante de ST, de pente -1, s'annulant pour $X(T) = E\text{-}p$. Pour $S(T) \geq E$, le résultat est une perte de p.

Le graphique 2 reproduit la valeur du put et du résultat en fonction de l'évolution du cours de l'actif sous-jacent.



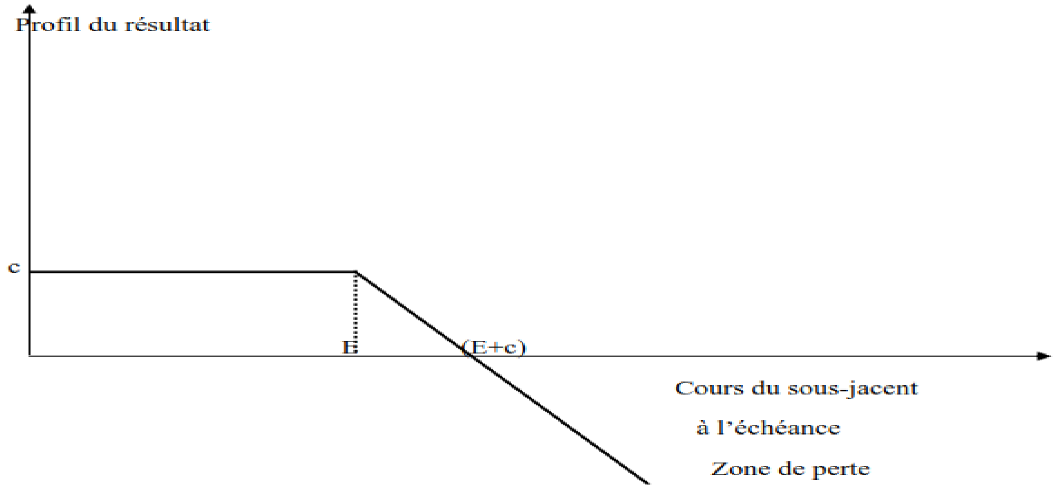

**2.3. La vente d'un call.**

C'est la contrepartie de l'opération 1. L'opérateur s'engage, si l'option est exercée, à livrer le titre à l'échéance au prix d'exercice E en échange de la prime que lui verse l'acheteur. L'investisseur (qui est le vendeur de l'option ) réalise une telle opération quand il anticipe une baisse du titre, ou au mieux, le cours va se stabiliser.

Si tel est bien le cas, l'acheteur n'exerce pas son option, le vendeur conserve la prime de toute façon. Si le cours dépasse le prix d'exercice augmenté de c le résultat est une perte qui peut être très élevée. Formellement, le résultat ( pour le vendeur ) s'écrit :

$$\text{Résultat de l'opération} = \begin{cases} c & \text{si } S(T) \leq E \\ (E + c) - S(T) & \text{si } S(T) \geq E \end{cases}$$

Le graphique 3 schématise le profil du résultat de la vente d'un call.



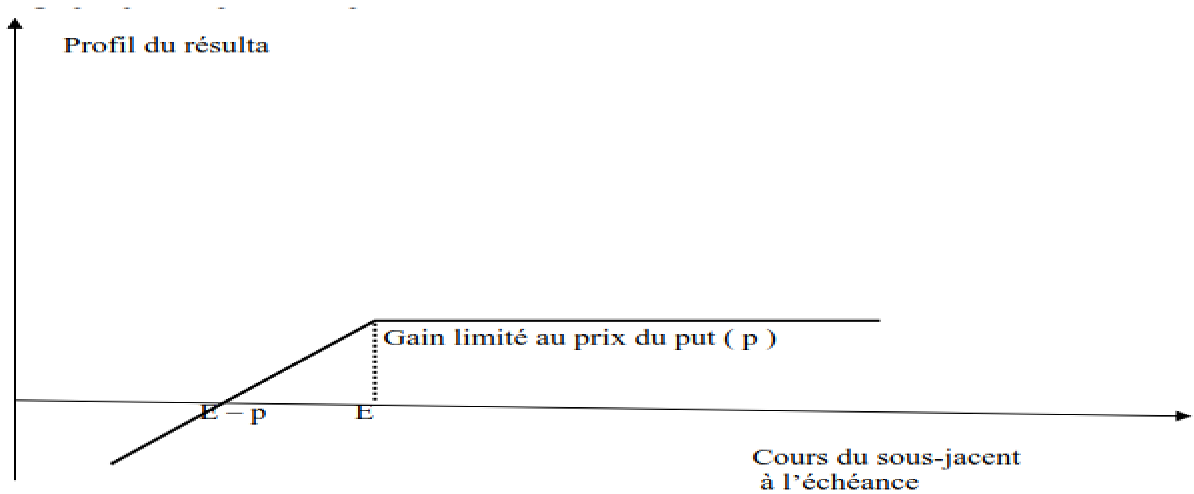

## 2.4. La vente d'un Put

C'est la contrepartie de l'opération 2. L'opérateur (le vendeur) s'engage à acheter le titre support à l'échéance au prix E, moyennant le paiement d'une prime égale à p. L'opérateur prend une telle position quand il estime que les cours vont monter ou du moins se stabiliser. Dans le cas contraire, il subit une perte qui peut être élevée.

Le résultat de cette position de base pour le vendeur s'écrit :

$$\text{Résultat} = \begin{cases} p & \text{si } ST \geq E \\ ST - (E - p) & \text{si } ST \leq E \end{cases}$$

Le graphique 4 reproduit le profil du résultat.




Les ventes d'options constituent des stratégies particulièrement risquées. Pour éviter d'éventuelles défaillances, dans les marchés organisés d'options, s'interpose entre vendeurs et acheteurs une chambre de compensation. Celle-ci impose, aux vendeurs d'option le versement d’un dépôt de garantie, à l’ouverture d’une position et les soumet à un système d’appels de marge.

Les quatre graphiques précédents illustrent les possibilités offertes par les options simples : l'achat d'une option d'achat peut être considérée comme une assurance contre la baisse du titre lorsque l'on spécule à la hausse ; l'achat d'une option de vente comme une assurance contre la hausse du titre, lorsque l'on spécule à la baisse. Les ventes d'option sont beaucoup plus risquées, car si elles procurent un gain certain immédiat, mais peuvent conduire à des pertes futures très importantes si les cours évoluent de façon inverse à ce que le vendeur d'option a anticipé. Remarquons aussi, que par rapport à l'achat des titres de base, une opération sur options peut être plus intéressante, dans la mesure où la mise de fonds est moindre et peut offrir une rentabilité plus forte : les options possèdent un effet de levier très important.

### 3. Valeur des options avant l'échéance : Valeur intrinsèque et valeur temps.

Comme nous l’avons vu, toutes choses égales d'ailleurs, la valeur d'une option est (en général) une fonction croissante de sa durée de vie. Il s'ensuit que la valeur d'une option est plus grande avant l'échéance qu'à sa date d'expiration. Avant l'échéance, la valeur d'une option a deux composantes : la valeur intrinsèque et la valeur temps ou spéculative.

#### 3.1. La valeur intrinsèque

C’est celle qu'aurait l'option si l'on était exercée immédiatement savoir $Max[0,S(t)-E]$ pour un call et $Max[0,E - S(t)]$ pour un put, où $0 < t < T$.

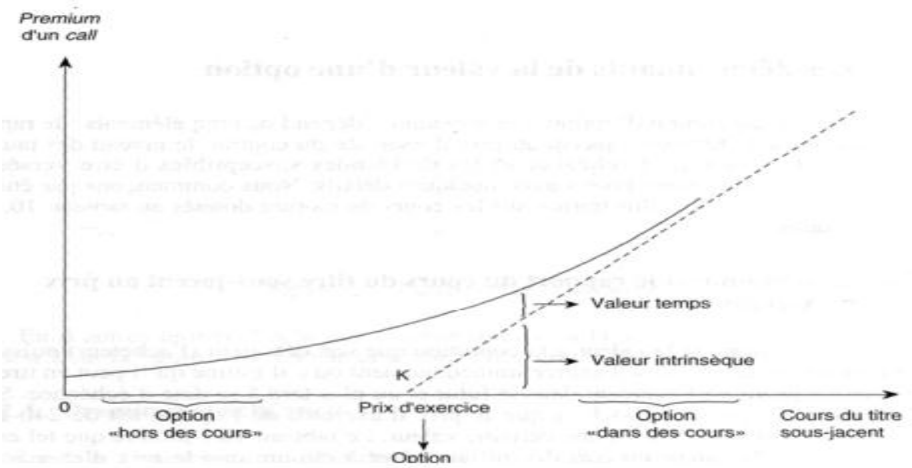
Une caractéristique des calls et des puts européens ou américains concerne le niveau du prix d'exercice par rapport au cours du jour de l'actif sous-jacent.
- Si l'option était arrivée à échéance aujourd'hui ( à la date t) devrait-elle être exercée ?

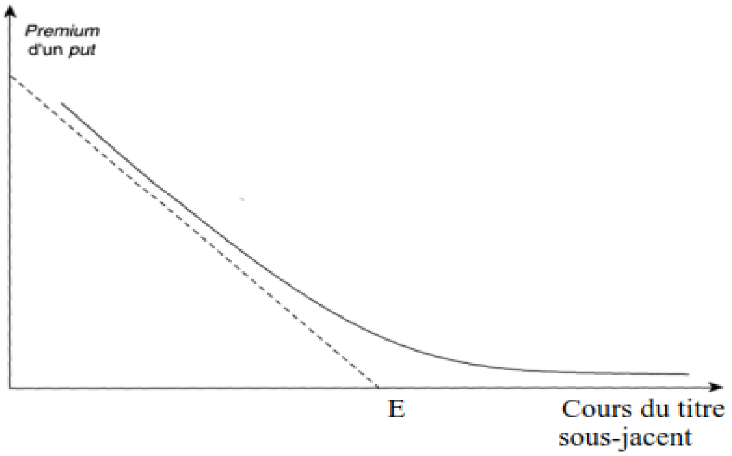
Si tel est le cas, on dit que l'option est « in the money » dans-la-monnaie. S'il s'agit d'un call, cela signifie que le cours du jour est supérieur au prix d'exercice ($St >E$). S'il s'agit d'un put, c'est le contraire, c'est-à-dire que le cours du jour est inférieur au prix d'exercice ( $St< E$).
- Si l'option était arrivée à échéance aujourd'hui (date t ) et si on ne devait pas l'exercer, on dit que l'option est « out of the money, » « en-dehors-de-la-monnaie. S'il s'agit d'un call, cela signifie : $St < E$. S'il s'agit d'un put, cela signifie : $St > E$
- Si l'on a aujourd'hui : $St = E$, on dit que l'option est « at the money » (à la monnaie ».

#### 3.2. La valeur temps

La seconde composante, la valeur temps ou spéculative, est due à la possibilité que le cours du support, S(t), augmente (cas du call) ou diminue (cas du put) d'ici à la date d'échéance. Cette valeur est d'autant plus élevée que la volatilité du support est grande et que la date d'expiration ( sauf éventuellement pour le put européen) est lointaine.

La valeur totale d'une option est la somme de sa valeur intrinsèque et de sa valeur. Elle tend vers sa valeur intrinsèque lorsqu'on se rapproche de la date d’exercice.Le graphique ci-dessous représente le prix d'un call en fonction du cours du titre support




On remarquera que la valeur temps est faible pour les options très «in the money » et très « out-of-the money ». Elle est d'autant plus élevée que l'option est at the money c'est-à-dire que le prix du titre support est proche du prix d'exercice.

## Références bibliographiques

Roland Portrait, Patrice poncet, 2008, Finance de marché : instruments de base, produits dérivés, Portefeuilles et risques, Dalloz.

Mishkin,.F.S. (2010), « Monnaie, banque et marchés financiers », 10ème edition, The Addison-Wesley series in economics, Pearson.

Hull, J. C., 2011, Options, futures et autres actifs dérivés, 6ème edition, Pearson Canada.

Alain Ruttiens, 2006, Futures, swaps, Options. Les produits financiers dérivés, édipro.

Yves Jégourel, 2005, Les produits financiers dérivés, édition La découverte.

Boissonnade J, Les options : concepts et applications, Edition ESKA, 1997.

Hallel M. , L'évaluation des actifs conditionnels, support de cours IFID, 2008

# II. Les propriétés des options sur actions

## Introduction

Dans cette partie, nous analysons les facteurs influençant le prix des options sur actions. Nous utilisons de nombreux arguments d'arbitrage pour explorer les relations liant les prix des options européennes, les prix des options américaines et le prix de l'action sous-jacente. La plus importante de ces relations est la parité call-put, qui établit le lien entre le prix d'une option d'achat européenne (un call européen) et le prix d'une option de vente européenne (un put européen).

Cette partie examine également les conditions d'exercice prématuré des options américaines. Nous montrons qu'il n'est jamais optimal d'exercer, avant l'échéance, un call américain sur une action ne versant pas de dividendes. Par contre, l'exercice prématuré d'un put américain sur une telle action peut se révéler optimal.

**1. Les facteurs influençant le prix des options**

Le prix d'une option dépend, d'une part, de facteurs exogènes à l'option, liés soit aux caractéristiques du titre support (le cours, la volatilité et la distribution de dividendes), soit aux conditions du marché (taux d'intérêt) et, d'autre part, de facteurs endogènes à l'option comme son prix d'exercice et sa maturité.

Ces différents facteurs sont au nombre de six.

- Le cours de l'action, S0
- Le prix d'exercice, E.
- La volatilité du cours du titre sous-jacent, < □
- Le temps restant à courir jusqu'à l'échéance, T, mesuré usuellement en années.
- Le taux d'intérêt sans risque annuel, r.
- Les dividendes prévus durant la durée de vie de l'option.

**4.1. Le cours du titre support.**

Le prix d'une option est une fonction non linéaire du cours du support. Comme nous le verrons plus loin, il se scinde en deux composantes : la valeur intrinsèque et la valeur temporelle. A prix d’exercice fixé, quand le cours du titre support augmente la valeur du call s’accroit et celle du put diminue.

**4.2. Le prix d'exercice de l’option**

Une option d'achat sera d'autant plus facilement exercée avec profit que son prix d'exercice est faible; le prix d'une telle option sera donc une fonction décroissante de son prix d'exercice. Inversement, on aura d'autant plus de chances d'exercer une option de vente avec profit que son prix d'exercice est élevé. Le prix d'une option de vente est donc une fonction croissante de son prix d'exercice.

### 4.3. La volatilité du cours du titre sous-jacent.

Celle-ci est mesurée par l'écart- type de la distribution du taux de rentabilité d# support. Plus le cours du titre est volatil, plus il a de chances, au terme d'une période donnée, de s'élever au-dessus du prix d'exercice (ce qui est favorable au call ) et plus il a de chances aussi de descendre au-dessous de celui-ci ( cas favorable au put). Ceci implique que le call et le put sont d'autant plus chers la volatilité du sous-jacent est forte.

### 4.4. Le temps restant à courir jusqu'à l'échéance

La hausse du cours qu'escompte l'acheteur d'une option d'achat aura d'autant plus de chances de se réaliser que l'échéance du contrat est éloignée. D'autre part, l'avantage que présente l'option par rapport à l'action, en termes de possibilités de placement, est d'autant plus important qu'il y a de temps à courir jusqu'à son échéance. Le prix de l'option d'achat sera donc une fonction croissante de sa durée de vie En ce qui concerne l'option de vente, la probabilité de pouvoir l'exercer avec profit est d'autant plus importante que son échéance est éloignée, par contre. elle présente alors un désavantage plus grand par rapport à 1' action sur le plan de la trésorerie, de telle sorte que l'effet net de sa durée de vie n'est pas évident.

### 4.5. Le taux d'intérêt sans risque

L'acquisition d'une option d'achat demande moins de capitaux que l'achat immédiat du titre de base. Les capitaux restés ainsi disponibles peuvent être placés au taux sans risque r. C’est l’avantage de l'option par rapport au titre de base. Par conséquent, le prix que les investisseurs accepteront de payer pour l'acquérir, sera d'autant plus important que le taux sans risque r sera élevé. Par contre, par rapport à la vente du titre de base, l'achat d'une option de vente provoque une sortie de fonds immédiate et retarde l'encaissement du prix de la vente; on doit donc s'attendre à ce que le prix de l'option de vente soit d'autant plus faible que le taux d'intérêt sans risque est élevé.

### 4.6. Le paiement de dividendes

Toutes choses étant égales par ailleurs, le paiement d'un dividende devrait provoquer une baisse du cours de l'action égale au montant du coupon qui vient d'être détaché. Etant donné que les contrats d'option ne sont pas ajustés à la suite d'une distribution de dividendes, cette opération profitera au vendeur de l'option d'achat et à l'acheteur de l'option de vente. Par contre, elle sera défavorable pour l'acheteur de l'option d'achat et pour le vendeur de l'option de vente.

Il est donc clair que le prix de l'option devra tenir compte de l'éventualité du paiement d'un dividende. Une distribution attendue exercera un effet négatif sur la valeur d'une option d'achat et une influence positive sur la valeur d'une option de vente.

Par conséquent, la valeur d'un call est une fonction décroissante du montant de dividende anticipé et, réciproquement, la valeur d'un put est une fonction croissante du dividende.

Le tableau suivant résume les effets des différents examinés.

| Variable | Call Europeen | Put Europeen | Call Américain | Put Américain |
|---|---|---|---|---|
| Cours actuel de l'action | + | - | + | - |
| Prix d'exercice | - | + | - | - |
| La date d'échéance | ? | ? | + | + |
| Volatilité | + | + | + | + |
| Taux d'intérêt sans risque | + | - | + | - |
| Dividendes | - | + | - | + |

« + » signifie qu'une croissance de la variable provoque une augmentation de la valeur de l'option ; « - » signifie qu'une augmentation de la variable entraîne une baisse de la valeur de l'option ; « ? » signifie que la relation est incertaine.

## 2. Evaluation des options et Arbitrage

### 2.1. Le concept d'arbitrage

L'arbitrage est un principe fondamental sur lequel reposent beaucoup de raisonnements employés pour l'évaluation des options. On dit qu'il existe une opportunité d'arbitrage lorsqu'il est possible de réaliser un profit sans risque et sans apport de fonds par une combinaison de 2 ou plusieurs transactions

Dans l'évaluation des options, il est fait l'hypothèse fondamentale qu'il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage (Absence d'Opportunité d'Arbitrage : A.O.A). L'on a alors recours, très souvent, à un type de raisonnement par arbitrage. Ce raisonnement est le suivant : tel actif doit valoir F, sinon il y aurait une possibilité d'arbitrage. Or il n'est pas possible qu'il y ait une possibilité d'arbitrage. Donc l'actif vaut F.

**Exemple du principe d'A.O.A**

Considérons 2 portefeuilles A et B et 2 dates t et T (avec T postérieur à t). En t, on sait, avec certitude, que les 2 portefeuilles auront la même valeur en T quels que soient les états de la nature.

On aura donc, en T : $VA(T) = VB(T)$

On en conclut que les 2 portefeuilles ont la même valeur en t: $VA(t) = VB(t)$

Le raisonnement est le suivant. Si les 2 portefeuilles n'avaient pas la même valeur en t, par exemple, si l'on avait $VA(t) < VB(t)$, alors il existerait une opportunité d'arbitrage. En effet, il serait possible à un arbitragiste d'emprunter en t, le portefeuille B, pour le revendre immédiatement au prix VB(t). Cela s'appelle une vente à découvert ( short sale en anglais»). Ce sont des intermédiaires du marché boursier (brokers) qui organisent le prêt de titres.

Naturellement, l'emprunteur des titres est débiteur de ces titres et devra les rendre plus tard à leur propriétaire. Il devra les acheter en bourse pour pouvoir les rendre.

En t, l’arbitragiste emprunte le portefeuille B, le revend immédiatement au prix VB(t) et réemploi cette somme pour acheter le portefeuille A au prix VA(t) et il reste

Il reste à l’arbitragiste une somme disponible M = VB(t) – VA(t) qui sera placée au taux sans risque à capitalisation continue r et devenir, à la date T, égale à $M\ e^{r(T-t)}$

À la date T, l'arbitragiste revend le portefeuille A au prix VA(T). Comme à la date T, quels que soient les états de la nature, on est sûr que VA(T) = VB(T) alors l'arbitragiste, avec le produit de la vente du portefeuille A est sûr de pouvoir racheter le portefeuille B pour le rendre à son propriétaire. L'arbitragiste réalise alors un profit sans risque $M\ e^{-r(T-t)}$ sans mise de fonds préalable.

Donc si, en t, les 2 portefeuilles A et B n'avaient pas la même valeur, il existerait une opportunité d'arbitrage. Or une telle opportunité d'arbitrage est impossible dans un marché efficient. Par conséquent, les portefeuilles A et B ont la même valeur en t : VA (t) = VB(t)

On peut aussi montrer que si VA(T) > VB(T), pour qu'il y ait AOA (Absence d'Opportunité d'Arbitrage), on doit avoir : VA(t) > VB(t)

Un raisonnement de ce type sera utilisé de nombreuses fois pour l'évaluation des options.

### 3. Les conditions générales sur les limites des prix des options

Les prix des options obéissent à des contraintes qui méritent d’être explicitées.

Désignons par :

So : cours de l'action à la date 0 E : prix d'exercice de l'option
T : temps restant à courir jusqu'à l'échéance de l'option
ST : cours de l’option à la date d’échéance.
r : taux d'intérêt sans risque annuel, capitalisé en continu, pour un investissement d'une durée T
C : valeur d'un call américain sur une action
P : valeur d'un put américain sur une action
c : valeur d'un call européen sur une action
p : valeur d'un put européen sur une action

#### 3.1.Limites supérieures pour la valeur des options

Un call, qu'il soit européen ou américain, donne droit à acheter une action à un certain prix. Quoi qu'il arrive, l'option ne peut jamais valoir plus que l'action qu'elle permet d'obtenir. Par conséquent, le cours de l'action constitue la limite supérieure de la valeur de l'option d’achat.

$c \leq S0$ et $C \leq S0$

Si ces relations n'étaient pas vérifiées, un arbitragiste pourrait facilement réaliser un profit sans risque en achetant l'action et en vendant le call.

Un put, qu'il soit européen ou américain donne droit à vendre une action à un certain prix. Le put ne peut jamais valoir plus que la somme E qu'il permet d'obtenir. Pour les options européennes, nous savons qu'à la maturité, l'option ne peut valoir plus que E. Aussi, à la date d'aujourd'hui, sa valeur ne peut être supérieure à la valeur actuelle de E.

$p \leq E\ e^{-rT}$

S'il s'agit d'un put américain, on ne peut pas préciser cette valeur actuelle car on ne sait pas à quelle date le put sera éventuellement exercé.

### 3.2.Les limites inférieures des prix des options européennes sur des actions ne versant pas de dividendes

#### 3.2.1. Le cas d'un call

Une des bornes inférieures de la valeur d'un call européen sur une action ne versant pas de dividendes est : $S0 – E\ e^{-rT}$

En effet, considérons les 2 portefeuilles A et B constitués en t :

- A comprend 1 call européen et des liquidités pour un montant $E\ e^{-r(T-t)}$ liquidités qui seront placées au taux d'intérêt sans risque à capitalisation continue au taux sans risque r.
- B comprend 1 action

À l'échéance T, le portefeuille A vaut :

Le portefeuille B vaut: $VB(T) = ST$ En T, on aura donc $VA(T) \geq VB(T)$

Pour qu'il y ait A.O.A, la même inégalité doit prévaloir en t :

$VA(t) \geq VB(t)$ $c + E\ e^{-r(T-t)} \geq St$ $c \geq St – E\ e^{-r(T-t)}$ Par ailleurs, ce call doit avoir une valeur positive : $c > 0$

En effet, à l'échéance, le call doit procurer soit un pay-off positif, soit rien du tout dans la pire des hypothèses. Sa valeur, à une date qui précède l'échéance, est donc forcément positive.

Ces 2 conditions simultanées conduisent à : $c \geq \max[S – E\ e^{-rf(T-t)}, 0]$

#### 3.2.2. Le cas d'un put

Une des bornes inférieures de la valeur d'un put européen sur une action ne versant pas de dividendes est donnée par : $E\ e^{-r(T-t)} - St$

Considérons à nouveau 2 portefeuilles A et B constitués en t :

-A comprend 1 put européen et 1 action

-B comprend une somme liquide de montant $E\ e^{-r(T-t)}$ qui sera placée au taux sans risque r.

À l'échéance T, les valeurs des deux portefeuilles sont : E

En T, on aura donc : $VA(T) \geq VB(T)$

Sous peine d'opportunité d'arbitrage, on doit avoir en t : VA(t) ≥ VB(t)

$p + St \geq E\ e^{-r(T-t)}$ $p \geq E\ e^{-r(T-t)} - St$

Puisque, dans le pire des cas, un put arrivé à échéance n'est pas exercé et ne vaut rien, sa valeur ne peut pas être négative. Ce qui se traduit par :

$$p = \max (E\ e^{-r(T-t)} - St, 0)$$

### 3.3.La relation de parité call-put pour les options européennes sur des actions ne versant pas de dividendes

Il existe, à une date t, une relation fondamentale entre la valeur c d'un call européen et la valeur p d'un put européen portant sur la même action sans dividende, ayant même prix d'exercice E et même date d'échéance T.

Considérons, à la date t, les 2 portefeuilles A et B.

Portefeuille A : 1 call + des liquidités d'un montant égal à $E\ e^{-r(T-t)}$

- A comprend 1 put européen et 1 action

- B comprend une somme liquide de montant Ee-r (T-t) qui sera placée au taux sans risque r. À l'échéance T, les valeurs des deux portefeuilles sont : E

En T, on aura donc : VA(T) ≥ VB(T)

Sous peine d'opportunité d'arbitrage, on doit avoir en t: VA(t) ≥ VB(t)

$p + St \geq E\ e^{-r(T-t)}$ $p \geq E\ e^{-r(T-t)} - St$

Puisque, dans le pire des cas, un put arrivé à échéance n'est pas exercé et ne vaut rien, sa valeur ne peut pas être négative. Ce qui se traduit par :

$p = \max (E\ e^{-r(T-t)} - St, 0)$

### 3.4.La relation de parité call-put pour les options européennes sur des actions ne versant pas de dividendes

Il existe, à une date t, une relation fondamentale entre la valeur c d'un call européen et la valeur p d'un put européen portant sur la même action sans dividende, ayant même prix d'exercice E et même date d'échéance T.

Considérons, à la date t, les 2 portefeuilles A et B.

Portefeuille A : 1 call + des liquidités d'un montant égal à $E\ e^{-r(T-t)}$

Portefeuille B : 1 put + une action qui vaut St en t. Ces 2 portefeuilles valent à l'échéance T :

Les 2 portefeuilles ont la même valeur en T ils doivent donc avoir la même valeur en t, sinon il existerait des opportunités d'arbitrage.

On a donc en t la relation

$c + E\,e^{-r(T-t)} = p + St \qquad p = c - St + E\,e^{-r(T-t)}$

Cette égalité est connue sous le nom de « relation de parité call-put de Stoll . Elle exprime le fait que la valeur d'un call (put) européen, caractérisé par un certain prix d'exercice et une date d'échéance, peut être déduite de la valeur d'un put (call) européen doté des mêmes caractéristiques (en termes de prix d'exercice, date d'échéance, action sous-jacente, etc.).

### 3.5.La relation de parité call-put pour les options américaines sur des actions ne versant pas de dividendes

La parité call-put a été établie pour les options européennes. Cependant, il est possible d'en tirer quelques résultats pour les options américaines. On peut ainsi démontrer que :

$St - E \leq C - P \leq St - E\,e^{-r(T-t)}$

On a : $P \geq p$

La relation de parité Call-put donne $P \geq c - St + E\,e^{-r(T-t)}$ Et comme $C = c$,

$P \geq C - St + E\,e^{-r(T-t)} \quad St - E\,e^{-r(T-t)} \geq C - P$ ou encore $C - P \leq St - E\,e^{-r(T-t)}$

Pour obtenir l'autre relation entre C et P, considérons les portefeuilles I et J suivants :

Portefeuille I : un call européen et un montant monétaire d'une valeur E ;

Portefeuille J : un put américain et une action.

Les deux options présentent les mêmes caractéristiques (sous-jacent, prix d'exercice et échéance) et la trésorerie du portefeuille I est investie au taux d'intérêt sans risque. Si le put n'est pas exercé prématurément, le portefeuille J vaut :

$\text{Max}(S_T ; E)$ à l'échéance T.

Le portefeuille I vaut à cette date : $\text{Max}(S_T - E,0) + E\,e^{r(T-t)} = \max(ST; E) - E + E\,e^{r(T-t)}$

Cette valeur est supérieure à celle du portefeuille J. Dans le cas où le put est exercé prématurément, à une date t, le portefeuille J vaut E à cette date. Même si le call n'a alors aucune valeur, le portefeuille I vaut néanmoins $E\,e^{r(T-t)}$ à la date t. Ainsi, le portefeuille I vaut plus que le portefeuille J dans tous les cas. On obtient : $c + E \geq P + St$ et comme $c = C$,

$C + E \geq P + St$ ou encore : $C-P \geq St-E \qquad St - E \leq C- P$

La combinaison des deux inégalités ainsi obtenues donne : $St- E \leq C-P \leq St- E\,e^{-r(T-t)}$

### 3.6.Exercice anticipé des options américaines sur des actions sans dividende :

Contrairement aux options européennes qui ne peuvent être exercées qu'à l'échéance, les options américaines peuvent être exercées à n'importe quel moment jusqu'à l'échéance. Si une option américaine est exercée avant l'échéance, on dit qu'il y a exercice anticipé de l'option. Pour les options américaines se pose alors le problème de la date optimale d'exercice.

### 3.6.1. Le cas d'un Call

Le détenteur d'un call américain dispose de tous les droits dont dispose le détenteur d'un call européen, plus le droit supplémentaire d'exercice anticipé. La valeur d'un call américain est donc au moins égale à celle du call européen correspondant (même actif sous-jacent, même échéance, même prix d'exercice...,etc). On doit donc avoir, à une date quelconque t avant l'échéance T:

$C > c$

Nous avons vu ci-dessus que : $c \geq St - E\ e^{-r\,(T-t)}$

Donc: $C > St - E\ e^{-r(T-t)}$

La valeur actuelle du prix d'exercice E, à la date t, est inférieure à E. On peut donc écrire : $C > St - E$

On voit donc, qu'à la date quelconque t avant l'échéance, le call américain, sur l'action sans dividende, vaut plus s'il est maintenu en vie que s'il est exercé. En effet, s'il était optimal d'exercer plus tôt, C serait égal à St- E.

On en conclut que :

- Le call américain sur une action ne versant pas de dividende ne doit jamais être exercé avant l'échéance ;

- Le call américain sur une telle action a la même valeur que le cail européen : C =c

### 3.6.2. Le cas d'un put.

Le put américain confère à son acheteur les mêmes droits qu'un put européen, mais aussi, un droit d'exercice anticipé. Le prix d'un put américain est donc est au moins égal à celui d'un put européen de même caractéristique :

$P \geq p \geq E\ e^{-r(T-t)} - St$

Pour un put américain de valeur P, la condition la plus forte: $P \geq E - St$ est toujours vérifiée puisqu'un exercice immédiat est toujours possible.

Le droit attaché à l'exercice du put américain étant valorisé, on peut conclure que l'opportunité de l'utiliser avant l'échéance est tout à fait envisageable.

## 3.7.Impact du paiement de dividendes sur les options

Les résultats présentés jusque-là supposaient que les actions sous-jacentes aux contrats d'options ne payaient pas de dividendes. Dans cette section, nous examinons l'impact de l'existence de dividendes

### 3.7.1. Limite inférieure pour un call européen

Le raisonnement est le même que précédemment. Les portefeuilles A B sont maintenant constitués de la façon suivante :

Le portefeuille A comprend le call européen et une somme liquide égale à la valeur actuelle en t non seulement du prix d'exercice mais également des dividendes prévisionnels devant être versés pendant le temps restant à courir jusqu'à l'échéance. On appelle D cette valeur actuelle des dividendes.

Le portefeuille B est inchangé et comprend toujours une action.

A la date T, on constate que VA(T) > VB(T). On conclut alors qu'à la date t, la même inégalité doit prévaloir sous peine d'apparition d'opportunités d'arbitrage.

$VA(t) > VB(t)\, c + E\, e^{-r(T-t)} + D > St \quad c > St - E\ ^{e-r(T-t)} - D$

### 3.7.2. Limite inférieure pour un put européen

Le portefeuille A comprend 1 put européen et 1 action.

Le portefeuille B est constituée d'une somme liquide égale à $E\, e^{-r(T-t)} + D$ En T, on a VA(T) > VB(T)

D'où $p + St > E\, e^{-r(T-t)} + D \quad p > E\, e^{-r(T-t)} + D - St$

### 3.7.3. Incidence sur la relation de parité Call-Put pour les options européennes.

Le portefeuille A est constitué d'un call plus une somme liquide qui sera placée au taux sans risque r dont le montant comprend, en plus de la valeur en t du prix d'exercice E, la valeur ( à la même date t ) de tous les dividendes versés pendant le temps qui reste à courir jusqu'à l'échéance de l'option. Soit D cette valeur.

Le même raisonnement permet de constater que les portefeuilles A et B ont la même valeur à l'échéance T, en toute circonstance. Sous peine d'arbitrage, les 2 portefeuilles doivent avoir la même valeur en t.

$c + D + E\, e^{-r(T-t)} = p + St$

### 3.7.4. Incidence sur la relation de parité Call-Put pour les options américaines

En l'absence de distribution de dividendes, nous avons la double l'inégalité

$St - E \leq C - P \leq St - E\, e^{-r(T-t)}$

Le versement de dividendes la modifie de la façon suivante :

$St - E - D \leq C - P \leq St - E\, e^{-r(T-t)}$

Les dividendes réduisent C et augmentent P, L'inégalité $C - P \leq St - E\, e^{-r(T-t)}$ doit aussi être vérifiée quand il y a versement de dividendes.

Pour obtenir l'autre inégalité, considérons les portefeuilles I et J suivants :

Portefeuille I : un call européen et un montant monétaire d'une valeur D + E;

Portefeuille J : un put américain et une action.

Les deux options ont les mêmes caractéristiques (sous-jacent, prix d'exercice et échéance) et la trésorerie du portefeuille I est investie au taux d'intérêt sans risque. Si le put n'est pas exercé prématurément, le portefeuille J vaut, à l'échéance T :

$VJ(T) = Max[ST, E ] + D e^{r(T-t)}$

Le portefeuille I vaut, à cette même date :

$VI(T) = Max[ST- E, 0] + E e^{r(T-t)} + D e^{r(T-t)} = Max[ST, E] + + D e^{r(T-t)} + E e^{r(T-t)} - E$

Cette valeur est supérieure à celle du portefeuille J. Dans le cas où le put est exercé prématurément, à une date t, le portefeuille J vaut E + Der(T-t). Même si le call n'a alors aucune valeur, le portefeuille I vaut néanmoins ( E+ D)er(T-t) à la date t. Ainsi, le portefeuille I vaut plus que le portefeuille J dans tous les cas. On obtient :

$c + E + D \geq P + St$ Comme $C \geq c$

$C - P \geq St – D - E$

### 3.7.5. Incidence sur l’exercice anticipé d'un call américain

Lorsqu'aucun dividende n'est versé, nous avons vu qu’il n'est jamais optimal d'exercer un call américain avant l'échéance. La conséquence est que le prix du call américain est alors égal au prix du call européen. Lorsque l'action verse un dividende, ceci n'est plus vrai, le call américain peut être exercice prématurément

On a :

$C \geq c$ et $c > St – E e^{-r(T-t)} - D$ D’où $C \geq St – E e^{-r(T-t)} - D$

Par ailleurs, la valeur du call américain ne se négocie jamais au-dessous de sa valeur intrinsèque, soit :

$C \geq St - E$

L’exercice prématuré du call est optimal si

$St - E > St – E e^{-r(T-t)} – D$ $D > E [1 – e^{-r(T-t)}]$

En d'autres termes, si la valeur des dividendes actualisés est supérieure aux intérêts que l'on peut percevoir d'un placement équivalent au prix d'exercice, alors le call américain peut être exercé prématurément. En effet, l'exercice d'un call américain en vue de capturer des dividendes n'est optimal que si le montant D est supérieur aux intérêts que l'investisseur peut gagner en plaçant E au taux sans risque r pendant le temps restant à courir jusqu’à l’échéance.

Si cette condition n'est pas respectée, soit $D < E [1 – e^{-r(T-t)}]]$ le call américain ne doit pas être exercé prématurément et son prix doit alors être égal à celui du call européen.

### 3.7.6. Incidence sur l’exercice anticipé d'un put américain

Nous avons

$P \geq p$ et $p > E\, e^{-r(T-t)} + D - St$

Par ailleurs, la valeur d’un put américain est au moins égale à sa valeur intrinsèque $P \geq E - St$

On peut envisager l'exercice d'un put américain avant la date de détachement de dividendes, notamment lorsque nous avons :

$E - St > E\, e^{-r(T-t)} + D - St \qquad D < E\, [1 - e^{-r(T-t)}]\ ]$

En revanche, si les dividendes sont supérieurs aux intérêts que l'on pourrait percevoir d'un placement de montant E au taux r, alors l'exercice anticipé n'est pas optimal avant le détachement de dividendes, puisque le put se valoriserait d'un montant supérieur à ces intérêts.

Toutefois, on ne peut encore exclure l'exercice anticipé d'un put américain après la date de détachement des dividendes.

Ainsi, l'évaluation d'un put américain s'avère plus délicate que celle d'un call américain puisque l'éventualité d'un exercice prématuré ne peut jamais être écartée.

## Références bibliographiques

Black F. et M. Scholes, « The Pricing of Options and Corporate Liabilities », Journal of Political Economy, 81, (mai/juin 1973), 637-59 .

Broadie M. et J. Detemple, « American Option Valuation : New Bounds, Approximations, and a Comparison of Existing Methods », Review of Financial Studies, 9, 4 (1996), 1211-50.

Merton R. C., « The Relationship between Put and Call Prices : Comment », Journal of Finance, 28 (mars 1973), 183-84 .

Merton R. C., « Theory of Rational Option Pricing », Bell Journal of Economics and Management Science, 4 (printemps 1973), 141-83 .

Stoll H. R., « The Relationship between Put and Call Option Prices », Journal of Finance, 31 (mai 1969), 319-32 .

Hull, J. C., 2011, Options, futures et autres actifs dérivés, 6ème edition, Pearson Canada.

Hallel M. , L'évaluation des actifs conditionnels, support de cours IFID, 2008

Mamoghli chokri, Hellara slaheddine et Gatti Dora, Finance des marchés exercices et ces de synthèses corrigés, Les éditions C L E , Tunis, 1999.

Octave Jokung Nguéna, mathématiques et gestion financière, applications avec exercices corrigés, de boeck, 2004.

## Série d’exercices

### Questions théoriques

- Quels sont les six facteurs influençant la valeur d’une option ?
- Expliquez, de façon intuitive, pourquoi l’exercice anticipé d’un put américain devient plus intéressant lorsque le taux sans risque augmente et que la volatilité baisse.

### Exercice 1

Quelle est la borne inférieure du prix du call à 4 mois portant sur une action ne versant pas de dividendes et dont le cours est 28 €, sachant que le prix d’exercice de l’option est de 25 € et le taux d’intérêt sans risque est de 8% par an ?

### Exercice 2

Quelle est la borne inférieure du prix d’un put européen à 1 mois portant sur une action ne versant pas de dividendes et dont le cours est 12 €, sachant que le prix d’exercice de l’option est de 15 € et le taux d’intérêt sans risque est de 6% par an ?

### Exercice 3

Le prix d’une action est de 19 € et celui d’un call européen à 3 mois sur ce titre avec un prix d’exercice de 20 € est égal à 1 €. Le taux sans risque est de 4% par an. Quel est le prix du put de même caractéristiques que le call ? ( On suppose que l’action ne paie pas de dividendes pendant les trois mois )

### Exercice 4

Quelle est la borne inférieure du prix du call à 6 mois portant sur une action ne versant pas de dividendes et dont le cours est 80 €, sachant que le prix d’exercice de l’option est de 75 € et le taux d’intérêt sans risque est de 10% par an ?

### Exercice 5

Quelle est la borne inférieure du prix d’un put européen à 2 mois portant sur une action ne versant pas de dividendes et dont le cours est 58 €, sachant que le prix d’exercice de l’option est de 65 € et le taux d’intérêt sans risque est de 5% par an ?

**Exercice 6**

Un call européen qui expire dans 6 mois et dont le prix d'exercice est de 30 € est coté 2 €. La valeur de l'action sous jacente est de 29 € et un dividende de 0,50 € est attendu dans deux mois , puis de nouveau dans dans cinq mois. La structure par termes des taux est plate avec un taux d'intérêt sans risque à 10% . Quelle est valeur d'un put européen dont l'échéance est de 6 mois et le prix d'exercice de 30 € ?

**Exercice 7**

Le prix d'un call américain sur une action ne versant pas de dividendes est de 4 €. Le cours de l'action est de 31 €, le prix d'exercice est de 30 € et la date d'échéance dans 3 mois . Le taux d'intérêt sans risque est de 8%. Déterminez les bornes supérieures et inférieures de la valeur du put américain de même caractéristiques.

# III. Les modèles d’évaluation des options

**Introduction**

Établir les bornes que la condition de non-arbitrage impose à la valeur des options ne suffit pas : il est nécessaire de connaître aussi précisément que possible la valeur de chaque option, pour pouvoir l'acheter ou la vendre, ou même pour gérer une position comprenant des options. Pour ce faire, il faut élaborer un modèle mathématique, nécessairement construit sur des hypothèses plus ou moins restrictives.

Les modèles d'évaluation peuvent être classés en deux catégories, selon que le temps est modélisé de façon discrète ou continue.

Le modèle de base de la première catégorie est dû à Cox, Ross et Ruhinstein ), et celui de la seconde à Black, Scholes et Merton ; tous universitaires américains.

Les deux types de modèles sont construits sur la base des hypothèses générales suivantes :

H l: Les options sont européennes.

H2 : Les marchés financiers sont parfaits.

H3: Le taux d'intérêt reste constant entre les instants 0 et T, date d'échéance des options. Ce taux est le taux instantané dans les modèles en temps continu et le taux-période pour ceux en temps discret.

H4. : Le support est un titre au comptant ne versant aucun dividende ou coupon entre 0 et la date d’échéance T.

H5 : La volatilité du titre support est constante dans le temps.

H6: En temps discret, la rentabilité du support à une date future suit une loi binomiale en temps continu, elle suit une loi normale.

## 1. Le Modèle binomial d’évaluation des options de Cox, Ross et Rubinstein (CRR) :

### 1.1. Modèle à deux dates et deux états du monde

Nous allons étudier le cas d'un marché financier à deux dates, la date 0 et la date 1, dans le cas très simple où il n'y a que deux états du monde possibles à la date 1. Il est évident qu'une telle situation n'est pas très réaliste et qu'il s'agit d'un cas "d'école » dont l'étude va nous permettre de dégager des concepts tels que :

• Portefeuille de duplication
• Portefeuille de couverture
• Probabilité neutre du risque

Qui sont utiles pour aborder ensuite des modèles plus évolués, correspondant à des situations plus réalistes. Le marché financier étudié comporte une action et un placement sans risque ( un livret d'épargne par exemple ).

A la date 0 l'action vaut S. A la date 1, l'action vaudra Su ou Sd suivant que son prix monte ( up ) ou baisse ( down), ce qui n'est pas connu à la date 0. On a coutume de dire que l'action vaut Su ou Sd selon «l'état du monde".

Le placement sans risque a un taux de rendement égal r ($r > 0$) : un dinar placé aujourd'hui rapportera $1 + r$ dinars à date 1 (quel que soit l'état du monde), c'est pour cela qu'on l'appelle placement sans risque.

Le problème de la valorisation de l'option est de déterminer le prix de l'option dans les conditions normales du marché.

### 1.1.1. Portefeuille duplicant : valeur de l'option

Un portefeuille est constitué d'un couple ($\alpha$, $\Delta$) où $\alpha$ la somme en dinars placée dans l'actif sans risque et $\Delta$ est le nombre d'actions que l'investisseur détient ($\alpha$ et $\Delta$ sont de signe quelconque : on peut vendre à découvert l'action et emprunter de l'argent). Si ($\alpha$, $\Delta$) est le portefeuille détenu à la date 0, sa valeur en dinars est de $\alpha + \Delta S$. A la date 1, ce même portefeuille vaut :

A $(I + r) + \Delta Su$ ou $\alpha(l + r) + \Delta * Sd$ selon que le marché a monté ou baissé

#### 1.1.1.1. Portefeuille duplicant (de dupication )

On dit que le portefeuille duplique l'option s'il se comporte comme l'option, c'est-à-dire si sa valeur à l'instant 1 est égale au gain que l'option permet de réaliser, ceci quel que soit l'état du monde.

#### 1.1.2.2. Valorisation d'une Option d'achat

$\alpha (l + r) + \Delta Su = \text{Max}[0, Su - E] = Cu$

$\alpha (l + r) + \Delta Sd = \text{Max}[0, Sd - E] = Cd$

L'application du principe de l'absence d'opportunité d'arbitrage ( AOA) donne :

$$\Delta = \frac{Cu - Cd}{S(u - d)} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{uCd - dCu}{(1+r)(u - d)}$$

Le nombre d'actions dans le portefeuille qui permet de répliquer l'option est appelé le « delta » de l'option. Il peut s'interpréter comme la sensibilité par rapport à l'évolution du cours du sous-jacent. Remarquons que le delta d'un call est positif (il faut acheter des actions pour répliquer un call) et que le delta d'un put est négatif (il faut vendre les actions à découvert pour répliquer un put). En revanche la position dans l'actif sans risque a est négative pour un call (un emprunt ) et positive pour un put (un placement) :

- call: $\Delta > 0$ et $\alpha < 0$;
- put : $\Delta < 0$ et $\alpha > 0$.

Sous la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage, la valeur de l'option doit être égale à celle du portefeuille qui le réplique. Par conséquent, on doit avoir :

$$c = \alpha + \Delta S = \frac{uCd - dCu}{(1+r)(u-d)} + \frac{Cu - Cd}{S(u-d)} S$$

$$c = \alpha + \Delta S = \frac{uCd - dCu}{(1+r)(u-d)} + \frac{[Cu - Cd](1+r)}{(u-d)](1+r)}$$

$$c = \alpha + \Delta S = \frac{uCd - dCu + Cu(1+r) - Cd(1+r)}{(1+r)(u-d)}$$

$$c = \alpha + \Delta S = \frac{1}{(1+r)} * \frac{uCd - dCu + Cu(1+r) - Cd(1+r)}{(u-d)}$$

$$c = \alpha + \Delta S = \frac{1}{(1+r)} * \frac{Cu[(1+r) - d] + Cd[u - (1+r)]}{(u-d)}$$

### 1.1.2.3. Probabilité neutre au risque

Posons :

$q = \frac{(1+r)-d}{u-d}$ , ce nombre a la signification d'une probabilité

(1+r) - d est positif ou nulle. L'hypothèse contraire, soit $(l + r) -d < 0 \Rightarrow (l+r)\, S < dS$ ne peut être acceptée car elle conduit à une opportunité d'arbitrage.

De même, u - (1+r) est positif ou nulle $\Leftrightarrow u \geq (l+r)$).

on a donc: $d \leq (l+r) \leq u \Leftrightarrow 0 \leq (l+r)-d \leq u-d$

$$0 \leq q = \frac{(l+r)-d}{u-d} \leq 1$$

$$1 - q = 1 - \frac{(l+r)-d}{u-d} = \frac{u - d - (l+r) + d}{u-d} = \frac{u - (l+r)}{u-d}$$

Reprenons l'équation donnant la valeur du call.

$$c = \alpha + \Delta S = \frac{1}{(1+r)} * \frac{Cu[(1+r) - d] + Cd[u - (1+r)]}{(u - d)}$$

$$c = \alpha + \Delta S = \frac{1}{(1+r)} * \left( Cu\frac{[(1+r) - d]}{(u - d)} + Cd\frac{[u - (1+r)]}{u - d} \right)$$

$$c = \alpha + \Delta S = \frac{1}{(1+r)} * [Cu*q + Cd\,(1-q)]$$

$$c = \frac{1}{(1+r)} * [Max(0, Su - E)*q + Max(0, Sd - E)*(1-q)]$$

$$c = \frac{1}{(1+r)} * [(Su - E)^{+}*q + (Sd - E)^{+}*(1-q)]$$

$$c = \frac{1}{1+r} *Eq[\tilde{S} - E]$$

La solution précédente se prête aux interprétations suivantes :

• Elle ne fait pas intervenir la probabilité objective de hausse p. Cette probabilité n'influence pas directement la valeur du call.

• Le paramètre qui entre en ligne de compte et qui joue le rôle de la probabilité est q .

L'équation qui donne la valeur du call ne fait intervenir aucune fonction d'utilité. Elle est donc compatible avec toutes les attitudes possibles à l'égard du risque, en particulier la neutralité. Une telle neutralité vis à vis du risque de la part des opérateurs impliquerait que la valeur de tout actif financier est égale à l'espérance des flux auxquels il donne droit actualisés au taux sans risque.

• L'équation donnant la valeur du call exprime cette égalité, à condition d'utiliser q ( et non p ) comme probabilité, q s'interprète comme la probabilité de l'événement " hausse du cours du titre support ) qui prévaudrait dans une économie où les individus sont indifférents au risque et donnerait pour c la même valeur que dans l'économie réelle. C'est la raison pour laquelle on rappelle souvent la probabilité risque neutre.

### 1.1.2.4. Valorisation d'une Option de vente

De la même façon, on montre que le prix d'une option de vente est :

$$p = \frac{1}{(1+r)} * [Max(0, E- Su)*q + Max(0, E -Sd)*(1-q)]$$

$$c = \frac{1}{(1+r)} * [ (E-Su)+*q + (E - SdE)+*(1-q)]$$

$$c = \frac{1}{1+r} *Eq [E- \tilde{S}]$$

#### 1.1.2.5. Portefeuille de couverture

On peut obtenir la valeur du call en construisant un autre portefeuille, appelé portefeuille de couverture, comprenant un support long ( c'est-à-dire acheté ou la propriété de l'investisseur ) et h calls courts ( c'est dire vendus à découvert ou emprunter ) en choisissant h de sorte qu'à la date 1 la valeur de ce portefeuille soit la même quelle que soit la situation du marché, autrement dit que le cours du titre support ait monté ou baissé.

La valeur du portefeuille en T = 1 sera : u.S - h. Cu = u.S - h. Max (0, u.S - E) si S1 = u.S, et d.S - h.Cd = d.S - h. Max (0, d.S - E) si S1= d.S

où Cu et Cd indiquent, respectivement, la valeur du call si le marché a monté ou baissé.

Ces deux valeurs sont égales si l'on choisit h tel que :

u.S - h.Cu = d.S - h.Cd => S( u - d) = h(Cu - Cd ) => [u -d]

$$h = \frac{[u -d]}{[Cu -Cd]}$$

$$h = \frac{u - d}{Max[0,uS -E]-Max[0,dS -E]} = \frac{u - d}{[uS -E]^{+} - [dS -E]+}$$

Le rapport h s'appelle ratio de couverture ( hedge ratio) parce que conduisant à la même valeur du portefeuille quelle que soit l'évolution du marché ( le portefeuille est alors sans risque ).

Remarquons que ce ratio de couverture est tout simplement l'inverse du rapport A utilisé dans le portefeuille de duplication.

Le portefeuille de couverture étant sans risque, il doit, sous peine d'arbitrage, rapporter le taux sans risque r ; par conséquent :

$$Su - h.Cu = d.S - h.Cd = (S - hc)(1+ r)$$

$$d.S - h.Cd = S(l+r) - hc\ (1 + r)$$

$$S[(1+r) - d\ ] = h[c(1+r)\ Cd]$$

En remplaçant h par son expression, l'équation précédente devient :

$$S[(1+r) - d\ ] = S\frac{u - d}{[Cu\ \ -Cd]}[c(1+r) - Cd]$$

$$\frac{[(1+r) - d\ ]}{u - d} = \frac{[c(1+r) - Cd]}{[Cu\ \ -Cd]}$$

$$q = \frac{[c(1+r) - Cd]}{[Cu\ \ -Cd]}$$

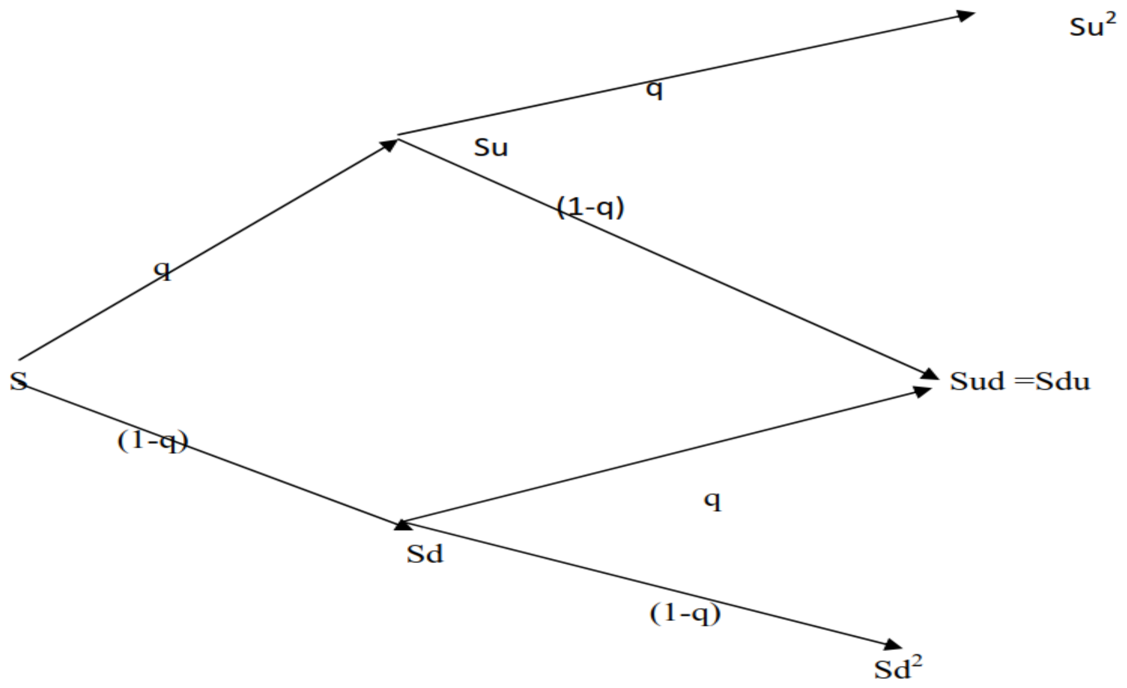
$$q\ [Cu\ \ -Cd]\ = c(1+r) - Cd$$

$$q\ Cu\ \ -qCd + Cd\ = c(1+r)$$

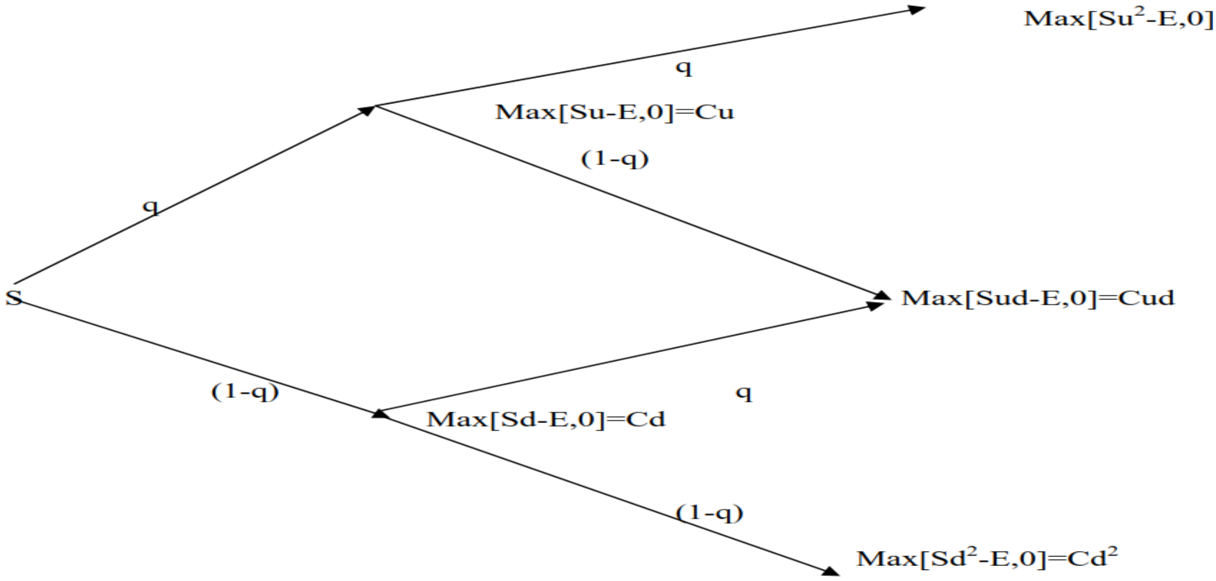
$$c = \frac{1}{1 + r} * [qCu\ \ + (\ 1 - q)Cd]$$

### 1.2. Extension à deux période : Modèle à deux périodes.

Lorsqu'il y a deux périodes, l'évolution du prix du support est décrite par l'arbre binomial



L'évolution du cash-flow ( pay off ) se déduit immédiatement :




Si le prix de l'actif à la date 2 est u2S, le résultat réalisé ou valeur du call est Max[0, Su2].
On a des formules analogues pour les deux autres cas.
Le raisonnement est le même que précédemment ; c'est à dire que le prix du call à un sommet quelconque de l'arbre binomial est la valeur actualisée, au taux sans risque, de l'espérance (avec la probabilité risque neutre ) des résultats obtenus aux deux sommets qui sont les suivants du sommet en question.
Cette procédure s'applique en partant des sommets terminaux en remontant l'arbre jusqu'à sa racine.
Le prix du call à l'instant 1 ( une Période avant 2) dans l'état haut est donné par la formule établie pour une période :

$$Cu = \frac{1}{(1+r)} [qCu2 + (1-q)Cud ]$$

De même

$$Cd= \frac{1}{(1+r)}[qCud + (1-q)Cd2)$$

On fait le même raisonnement entre 0 et 1

$$c = \frac{1}{(1+r)}[qCu + (1-q)Cd]$$

En remplaçant Cu et Cd par leurs valeurs, on obtient

$$c = \frac{1}{(1+r)2}[q^2Cu^2 + 2q(1-q)Cud +(1-q)^2Cd^2]$$

$$c = \frac{1}{(1+r)^2}[\sum_{j=0}^{2} C^n{}_j q^{n-j}(1-q)^j \, Max[0,Su^{n-j}d^j - E]$$

### 1.3. Généralisation à n périodes

En conservant la propriété selon laquelle, d'une période à l'autre, le support ne peut que monter du facteur multiplicatif u ou baisser du facteur multiplicatif d; Il y a, à l'échéance T, n +1 valeurs possibles pour ST si l'on a postule n pas ( n sous-périodes ).

Soit x le nombre de « up » réalisés parmi les n possibles. On sait que la probabilité pour que x = j est donné par:

$$\frac{n!}{j!\,(n-j)!} q^j (1\ q)^{n-j}$$

Quand x = j, la valeur du support, à l'échéance, ST, est de $u^j d^{n-j} * S$

La valeur du call est :

$$c = \frac{1}{(1+r)^n} * \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!\,(n-j)!} q^j (1-q)^{n-j} \text{Max}[0, [u^j d^{n-j} S - E]$$

$$c = \frac{1}{(1+r)^n} * \sum_{j=k}^{n} \frac{n!}{j!\,(n-j)!} q^j (1-q)^{n-j} [u^j d^{n-j} S - E]$$

où k est le nombre minimum de ( up ) tel que l'option expire in thé money et soit par conséquent exercée; k est donc tel que:

$u^k d^{n-k} S - E > 0$ et $u^{\alpha-1} d^{n-\kappa+1} S - E < 0$ ce qui implique $\alpha$est la partie entière de

$$\frac{\text{Log}[E/(d^n S)]}{\text{Log}(u/d)}$$

$$c = \frac{1}{(1+r)^n} * \sum_{j=k}^{n} \frac{n!}{j!\,(n-j)!} q^j (1-q)^{n-j} [u^j d^{n-j} S - E]$$

$$c = S * \sum_{j=k}^{n} \frac{n!}{j!\,(n-j)!} q^j (1-q)^{n-j)} \left[\frac{u^j d^{n-j}}{(1+r)^n}\right] - \frac{1}{(1+r)^n} E \sum_{j=k}^{n} \frac{n!}{j!\,(n-j)!} q^j (1-q)^{n-j}$$

$$\text{Posons } q' = \frac{u}{1+r} q \Longrightarrow 1 - q' = \frac{(1+r) - uq}{1+r} = \frac{q(u-d) + d - uq}{1+r}$$

$$1 - q * = \frac{d}{1+r}(1-q)$$

q' et (1-q') ε [0  1]. Par suite, q' est une probabilité.

$$q^j(1-q)^{n-j}\left[\frac{u^j d^{n-j}}{(1+r)^n}\right] = \frac{q^j(1-q)^{n-j}\,u^j d^{n-j}}{(1+r)^j\,(1+r)^{n-j}} = \left(\frac{u}{(1+r)}q\right)^j \left(\frac{d}{(1+r)}(1-q)\right)^{(n-j)}$$

$$= q'^j(1-q')^{(n-j)}$$

$$c = S^*\sum_{j=k}^{n}\frac{n\,!}{j\,!\,(n-j)\,!}q'^j(1-q')^{n-j} - \frac{1}{1+r)^n}E\sum_{j=k}^{n}\frac{n\,!}{j\,!\,(n-j)\,!}q^j(1-q)^{n-j}$$

$$c = S^*[1-B(k,n,q')] - \frac{E}{(1+r)^n}[1-B(k,n,q)]$$

Où B (k, n, q) et B(k, n, q') désignent les fonctions de répartition des lois binomiales ayant pour paramètres (k, n, q) et ( k, n, q').

C'est la formule établie par COX, ROSS et RUBINSTEIN(CRR).

**Valeur d'une Option de vente**

La Valeur d'une option de vente européenne peut être établie directement en utilisant le une démarche analogue à celle employée pour déterminer la valeur d'un call européen ou, beaucoup plus simplement, en utilisant la relation de parité Call-Put pour les options européennes. C'est cette dernière voie qui sera employée.

La version discrète de la relation de parité Call-Put pour les options européennes sur des actions ne versant pas de dividendes s'écrit :

$$c + \frac{E}{(1+r)^n} = p + S \Longrightarrow p = c + \frac{E}{(1+r)^n} - S$$

En remplaçant c par son expression, on obtient:

$$p = \frac{E}{(1+r)^n}B(k,n,q) \quad - SB(k,n,q')$$

## 2. Modèle d'évaluation des options en temps continu de Black-Scholes-Merton

Dans cette section nous dérivons l'équation fondamentale d'évaluation des titres contingents connue encore sous la fameuse équation aux dérivées partielle de Black-Scholes -Merton qui représente l'approche par variables d'état..

### 2.1. Équation fondamentale d'évaluation des options

Soit un actif S dont le prix suit un processus brownien géométrique comme suit :

$$d\,S(t] = \mu\, S(t)\, dt + \sigma\, S(t)\, d\, W(t)$$

Dans cette équation différentielle stochastique, μ représente le rendement espéré instantané de l'actif, σ la volatilité instantanée de ses rendements, et W est un processus de Wiener standard.

Considérons un titre contingent sur l'actif S, ce qui signifie que l'actif est le sous-jacent. Le prix du titre contingent sur le sous-jacent S à la date t est noté par F(S(t), t). On suppose également que la maturité de ce contrat est T, donc la valeur terminale du titre contingent est F(S(T), T).

Si le titre contingent est un call européen de maturité T et de prix d'exercice E, alors sa valeur terminale est :

$$c(S(T),T\,) = F(S(T), T) = \max(0, S(T) - E)$$

Par contre, s'il s'agit d'un put européen de même maturité et prix d'exercice, sa valeur terminale sera :

$$p\,(S(T),T = F(S(T), T) = \max(0, E - S(T)$$

Selon le lemme d'Itô, le processus du prix du titre contingent, F(S(t), t), peut s'exprimer comme suit :

$$dF(S(t),t) = \frac{\partial F(S(t),t)}{\partial S} dS(t) + \frac{\partial F(S(t),t)}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(S(S(t), t)}{\partial S^2} \sigma^2 S(t)^2 dt$$

$$dF(S(t),t) = \left( \frac{\partial F(S(t),t)}{\partial t} + \mu S(t) \frac{\partial F(S(t),t)}{\partial S} + \frac{1}{2} * \sigma^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 F(S(S(t), t)}{\partial S^2} \right) dt$$

$$+ \frac{\partial F(S(t),t)}{\partial S} \sigma S(t) dW(t) \qquad \text{(Equation 1)}$$

D'après cette équation différentielle stochastique, le rendement espéré instantané et la variance instantanée des rendements du titre contingent sont :

$$\mu F = \frac{E\left(\frac{dF}{dt}\right)}{F}$$

$$\mu F = \frac{\frac{\partial F(S(t),t)}{\partial t} + \mu S(t)\frac{\partial F(S(t),t)}{\partial S} + \frac{1}{2} * \sigma^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 F(S(S(t), t)}{\partial S^2}}{F}$$ (Equation 2)

$$\sigma F = \frac{\frac{\partial F(S(t),t)}{\partial S}\sigma S(t)}{F}$$ (Equation 3)

D'où, on peut réécrire le processus de F(S(t), t) comme suit :

$$dF(S(t\},t] = \mu_F F(S(t),t)dt + \sigma_F F(S(t),t)dW(t)$$

Formons à présent un portefeuille avec w fraction du titre contingent et le reste (1 -w) dans l'actif S. On notera P la valeur de ce portefeuille. Le rendement du portefeuille ainsi formé est :

$$\frac{dP(t)}{P(t)} = w\frac{dF(S(t),t)}{F(S(t),t)} + (1-w)\frac{dS(t)}{S(t)}$$

$$= [w\mu F + (1-w)\mu]dt + [w\sigma F + (1-w)\sigma]dW(t)$$ (Equation 4)

Le rendement du portefeuille serait instantanément sans risque si le terme de diffusion est nul, c'est-à-dire que le coefficient de dW est égal à zéro. Ce qui implique :

$$w\sigma F + (1-w)\sigma = 0 \quad \text{ou encore } w = \frac{\sigma}{\sigma - \sigma F}$$ (Equation 5)

Étant donné que le portefeuille est sans risque, son rendement espéré doit être égal au taux d'intérêt sans risque r, donc :

$$\frac{dP(t)}{P(t)} = rdt$$

Comparant cette expression à l'équation (4). et utilisant l'expression de w donnée par l'équation (5) ci-dessus, on obtient :

$$r = w\mu F\,(1 - w)\,\mu = \frac{\sigma}{\sigma - \sigma F}\mu F - \frac{\sigma F}{\sigma - \sigma F}\mu = \frac{\sigma\mu F - \sigma F\mu}{\sigma - \sigma F}$$

ou encore : $r(\sigma - \sigma F) = \sigma\mu F - \sigma F\mu \Longrightarrow \sigma(\mu F - r) = \sigma F(\mu - r)$

D'où
$$\frac{(\mu - r)}{\sigma} = \frac{(\mu F - r)}{\sigma F} \qquad \text{(Equation 6)}$$

Cette expression signifie que les primes de risque divisées par leur niveau de risque ou encore les ratios de Sharpe pour l'actif sous-jacent et le titre continger sont égales.

En substituant les équations (2) et (3) dans l'équation (6), nous obtenons :

$$\frac{\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{\partial F}{\partial t} - rF}{\frac{\partial F}{\partial S} S\sigma} = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

On réorganise les termes et on simplifie ce qui donne

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + rS\frac{\partial F}{\partial S} + \frac{\partial F}{\partial t} - rF = 0 \qquad \text{( Equation 7)}$$

Cette dernière équation constitue l'équation aux dérivées partielles de Blac».-Scholes-Merton et représente l'équation fondamentale d'évaluation des titres contingents avec la condition terminale F(S(T), T).

Cette équation est bien connue en sciences physiques sous le nom d'équation de la chaleur. Sous certaines conditions aux limites bien particulières, il est possible de la résoudre et d'obtenir une solution analytique exacte. C'est le cas par exemple des options call et put européennes.

**2.2. Valeur analytique exacte des options call et put européennes**

Pour une option call sur l'actif sous-jacent S de prix d'exercice E et de maturité T, la résolution de l'équation (7) avec les conditions aux limites :

$F(S(T), T) = \max(0, S(T) - E)$ donne la formule suivante pour le prix du call.

$c = S(0)N(d1) - Ee^{-rT}N(d2)$

avec

$$d1 = \frac{Log(S(0)/E) + rT}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T} \qquad d2 = d1 - \sigma\sqrt{T}$$

Où N(.) est la fonction de distribution cumulée de la loi normale, σ la volatilité instantanée des rendements de l'actif sous-jacent et r le taux d'intérêt sans risque. Pour une option put sur l'actif sous-jacent S avec prix d'exercice E et maturité T, la condition terminale est :

$F(S(T), T) = max (0, E – S(T)$

La solution de l'équation (7) implique une formule analytique du prix du put :

$P = Ee^{-rT}N(-d2) – S(0)N(-d1)$

**3. Convergence du modèle binomial de CRR vers le Modèle Continu de BSM**

Cox, Ross et Rubinstein ont montré que la formule binomiale converge vers celle de Black, Schole, Merton si la durée de vie de l'option est subdivisée en un nombre infini de sous-périodes sous les conditions suivantes :

Le choix de u et d est réalisé de façon à retrouver les valeurs exactes de la variance de rentabilité de l'actif sur chaque intervalle de longueur Δt. Dars l'univers risque-neutre, la rentabilité espérée d'une action doit être le taux d'intérêt sans risque.. Dès lors, l'action de prix initial S aura une valeur espérée égale à S $e^{r\Delta t}$ à la fin de l'intervalle de durée Δt Les paramètres doivent donc vérifier :

$Se^{r\Delta t} = qSu + (l\text{-}q)Sd$ ou encore $e^{r\Delta t} = qu + (1\text{-}q)d$ (1)

Le processus stochastique choisi pour décrire l'évolution du prix des actions conduit, sur un intervalle de longueur Δt, à une variance de la rentabilité de l'actif égale à σ2Δt la variance d'une variable X est définie par $E(X^2) - [E(X)]^2$, on peut écrire :

$$qu^2 + (l\text{-}q)d^2 - [qu + (l\text{-}q)d]^2 = \sigma^2\Delta t$$

En remplaçant q par sa valeur tirée de l'équation (1), cette expression se réduit à :

$$e^{r\Delta t}(u + d) - ud - e^{r\Delta t} = \sigma^2\Delta t \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) constituent deux premières contraintes sur la valeur des q, u et d. Cox, Ross et Rubinstein imposent comme contrainte supplémentaire : u d=l

Ces trois conditions impliquent les valeurs suivantes des paramètres. :

$$q = \frac{a-d}{u-d} \quad u = e^{r\sqrt{t}} \quad d = \frac{1}{u} \;\; et\; a = e^{rt}$$

## Références bibliographiques

Coval J. E. et J. ShuMWay, « Expected Options Returns », Journal ofFinance, 56, 3 (2001), 983-1009 .

Cox J. S. Ross et M. Rubinstein, « Option Pricing : A Simplified Approach », Journal of Financial Economics, 7 (octobre 1979), 229-64 .

Rendleman R. et B. Bartter, « Two State Option Pricing », Journal of Finance, 34 (1979), 1092-1111.

Blattberg R. et N. Gonedes, « A Comparison of the Stable and Student Distributions Statistical Models for Stock Prices », Journal of Business, 47 (avril 1974), 244-80 .

Fama E. F., « The Behavior of Stock Prices », Journal of Business, 38 (janvier 1965), 34-105.

Ko S. J., « Models of Stock Returns-A Comparison », Journal of Finance, 39 (mars 1984), 147-65 .

Richardson M. et T. Smith, « A Test for Multivariate Normality in Stock Returns », Journal of Business, 66 (1993), 295-321.

Black F., « How we came up with the Option Pricing Formula », Journal of Portfolio Management, 15, 2 (1989), 4-8.

Black F. et M. Scholes, « The Pricing of Options and Corporate Liabilities », Journal of Political Economy, 81 (mai/juin 1973), 637-59 .

Merton R. C., « Theory of Rational Option Pricing », Bell Journal of Economics and Management Science, 4 (printemps 1973), 141-183 .

Hull, J. C., 2011, Options, futures et autres actifs dérivés, 6ème edition, Pearson Canada.

Hallel M. , L'évaluation des actifs conditionnels, support de cours IFID, 2008

Mamoghli chokri, Hellara slaheddine et Gatti Dora, Finance des marchés exercices et ces de synthèses corrigés, Les éditions C L E , Tunis, 1999.

Octave Jokung Nguéna, mathématiques et gestion financière, applications avec exercices corrigés, de boeck, 2004.

Jean Philippe Argaud, Olivier Dubois, 2006 , méthodes mathématiques pour la finance : valorisation des produits et gestion des risques de marchés, Ellipses éditions.

Dalbarade, Jean Marcel (2005) : mathématiques des marchés financiers , 3eme Edition , Economica , Paris.

Bellalah M., et Simon Y., Option, Contrat à terme et gestion de risque, 2 ème édition, Economica, Paris, 2003.

BOISSONNADE J, les options : concepts et applications, Edition ESKA, 1997.

KACHKACH O ., Tout savoir sur les warrants, collection CITY & YORK, Paris, 2006.

Tjomb Bell , Maitriser les produits dérivés en partant de zéro, Amazone, 2015

## Série d’exercices

**Exercice 1**

Une action est actuellement cotée 40 €. On sait qu'au bout d'un mois, la valeur de l'action sera 42 € ou 38 €. Le taux d'intérêt sans risque est 8 % par an. Quelle est la valeur d'un call européen d'échéance 1 mois et de prix d'exercice 39 € ?

**Exercice 2**

Expliquez les approches fondées sur l'absence d'opportunités d'arbitrage et sur l'évaluation risque-neutre, pour évaluer une option européenne sur un arbre binomial à une seule période. Que signifie le delta d'une option ?

**Exercice 3**

Une action est actuellement cotée 50 €. On sait que dans six mois, elle vaudra 45 € ou 55 €. Le taux d'intérêt sans risque est de 10 % par an. Quelle est la valeur d'un put européen d'échéance 6 mois et de prix d'exercice 50 € ?

**Exercice 4**

Une action est actuellement cotée 100 €. A la fin de chacune des deux périodes de six mois, sa valeur augmentera de 10 % ou diminuera de 10 %. Le taux d'intérêt sans risque est de 8 % par an. Quelle est la valeur d'un call européen d'échéance 1 an et de prix d'exercice 100 € ?

**Exercice 5**

En conservant les données de l'exercice précédent, évaluez un put européen d'échéance 1 an et de prix d'exercice 100 € ? Vérifiez que les valeurs du put et du call européen valident la parité Call-Put.

**Exercice 6**

Considérons une action dont les variations, au cours de la vie d'une option européenne, sont gouvernées par un arbre binomial à deux périodes, Expliquez pourquoi il n'est pas possible de définir, dès la date initiale, une position en options et en actions qui reste sans risque tout au long de la vie de l'option.

**Exercice 7**

Une action est actuellement cotée 50 €. On sait que dans deux mois, elle vaudra soit 53 €, soit 48 €. Le taux d'intérêt sans risque est de 10 % par an. Quelle est la valeur d'un call européen d'échéance 2 mois et de prix d'exercice 49 € ? Utilisez le raisonnement d'arbitrage.

**Exercice 8**

Que suppose le modèle d'évaluation de Black et Scholes à propos de la distribution de probabilité du cours de l'action sur une année ? Que suppose-t- il à propos du taux de rentabilité composé continu des actions sur l'année ?

La volatilité d'un cours d'action est de 30 % par an. Quel est l'écart-type du pourcentage de variation sur un jour de cotation ?

Expliquez le principe de l'évaluation risque-neutre.

**Exercice 9**

Calculez la valeur d'un put européen à 3 mois portant sur une action ne versant pas de dividendes avec un prix d'exercice de 50 €, alors que le cours actuel de l'action est de 50 €. Le taux sans risque est de 10 % par an et la volatilité est de 30 % par an.

Comment modifiez-vous les calculs de l'exercice si un dividende de 1,50 € est attendu dans deux mois ?

**Exercice 10**

Considérons une option dont les caractéristiques sont les suivantes (Taux sans risque annuel discontinu) :

S = 100 ; E = 98 ; T = 90 jours ; Gan = 12% ; = 8%

Déterminer la valeur d'une option d'achat portant sur l'action. Déduire la valeur de l'option de vente.

**Exercice 11**

Soit une option d'achat sur une action cotée 40. Son prix d'exercice est égal à 40. Sa durée de vie est de 7 mois. Le taux sans risque annuel est égal à 5% en taux discontinu. L'écart-type mensuel de l'actif sous-jacent est égale à 0,11547.

Déterminer la valeur de l'option selon le modèle de Black and Scholes. Comparer la valeur obtenue à celle trouvée si on applique le modèle binomial.

**Exercice 12**

Considérons une option d'achat dont les caractéristiques sont les suivantes :

Cours de l'actif sous-jacent : S = 120

Prix d'exercice : E = 115 Maturité (365j) : 90 jours

Volatilité : 12%

Taux d'intérêt continu : r = 0,09

On vous demande de calculer le prix de ce call selon la formule de Black and Scholes. En déduire ensuite la valeur du Put.

# IV. Couverture des risques par les options : Les lettres grecques

**Introduction**

Une institution financière qui vend une option, de gré à gré, à un client est confrontée au problème de gestion de son risque. Si cette option se révèle identique à une autre option échangée sur un marché organisée, l'institution financière peut neutraliser son exposition au risque en achetant sur le marché, la même option que celle qui est vendue au client. Mais lorsque l'option a été taillée sur mesure, pour répondre à un besoin plus précis, elle ne correspond pas aux produits standard échangés en Bourse et la couverture contre le risque devient bien plus compliquée. Dans ce chapitre, nous traitons différentes approches de ce problème, nous focaliserons sur la couverture delta neutre et gamma neutre. L'objectif du trader est de gérer les grecques de telle manière que les risques pris soient acceptables.

## 1. Positions nues et positions couvertes

Dans les prochaines sections, nous utilisons comme exemple le cas d'une institution financière qui a vendu pour 300.000 $ de calls européens portant sur 100.000 actions ne versant pas de dividendes. Considérons les données suivantes :

$S_0$ = 49 $ , K = 50$, r = 5%, σ = 0, 2 et T = 20 semaines = 0, 3846 années.

L'option vaut, selon le modèle de Black et Scholes, 240.000 $ . L'institution financière a donc vendu l'option 60.000 $ de plus que sa valeur théorique. Mais elle est confrontée au problème de gestion des risques. Il est à noter que les institutions financières ne vendent pas en général des calls sur des actions individuelles. Cependant, un call sur une action est un exemple simple pour développer nos idées.

– Une des stratégies possibles pour une institution financière est de ne rien faire. C'est ce qu'on appelle adopter une position nue. C'est une stratégie qui fonctionne bien si le cours de l'action est inférieur au prix d'exercice soit 50 $ au bout de 20 semaines. L'option ne coûte finalement rien à l'institution financière et lui a rapporté 300.000 $. Mais une position nue est très risquée si l'option est exercée. L'institution financière aura à acheter 100.000 actions au prix du marché dans 20 semaines afin de respecter le contrat. Si par exemple, dans 20 semaines, le prix s'établit à 60 $, le coût pour l'institution est :

(50 — 60) × 100.000 + 300.000 = —1.000.000 + 300.000 = - 700.000 $

– Une stratégie alternative consiste à couvrir la position en achetant 100.000 actions au moment de la vente de l'option. Si l'option est exercée, cette stratégie fonctionne bien, mais dans le cas contraire, elle peut engendrer une perte significative. Supposons par exemple que le cours de l'action chute à 40$ dans 20 semaines, l'institution perd (40 - 49)×100.000 = 900.000$ sur sa position en actions, somme bien plus élevée que les 300.000$ reçus en contrepartie de la vente du call.

⇒ Ni une position nue ni une position couverte n'apportent une protection satisfaisante.

**2. Stratégie stop-loss**

Un procédé de couverture intéressant parfois envisagé est appelé stratégie stop-loss. Pour illustrer l'idée de base, considérons une institution qui a vendu un call de prix d'exercice K sur une action. La technique de couverture consiste à acheter l'action lorsque son cours dépasse le prix d'exercice K et à la vendre sitôt qu'il est descendu en dessous de K. L'idée est de détenir une position nue lorsque le cours de l'action est inférieur à K et d'être couvert lorsque le cours dépasse K. Le procédé est conçu de façon à ce que à la date T, l'institution financière possède bien l'action si l'option est dans la monnaie et qu'elle ne la possède pas si l'option est en dehors de la monnaie.

Cette stratégie bien qu'elle soit attrayante au premier abord, n'est pas une technique de couverture très efficace. Considérons son utilisation pour une option en dehors de la monnaie, si le cours de l'action n'atteint jamais le prix d'exercice K, la couverture ne coûte rien. Si la trajectoire du cours passe plusieurs fois par le prix d'exercice, la technique devient bien plus onéreuse.

**3. Couverture par le delta**

Une majorité de traders utilise des procédés de couverture bien plus sophistiquées que ceux qui ont été mentionnées jusque-là. Ils nécessitent le calcul de mesures telles que le delta et le gamma.

Le delta est défini comme le taux de variation de la valeur de l'option par rapport à celle du sous-jacent. C'est la pente de la courbe reliant la valeur de l'option à celle du sous-jacent. Si le delta d'une option est égal à 0,5 cela signifie que lorsque le cours de l'action varie de 1$, le cours de l'option varie de 0,5 $. En général,

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S}$$

Où s est la valeur du call et S est le cours de l'action. Supposons que le cours de l'action soit de 100$ et la valeur de l'option de 10$. Imaginons un investisseur qui a vendu 20 calls qui portent sur 100 actions chacun. Le delta de l'option est de 0,7. La position de l'investisseur peut être couverte en achetant 0,7 × 20 × 100 = 1.400 actions. Le gain ou la perte sur la position en options tendrait à être compensé par la perte ou le gain sur la position en actions. Si le cours de l'action augmente de 1$ :

Gain sur actions = 1$ × 1.400 = 1.400$

La valeur de l'option augmentera d'environ 0,7 × 1$ = 0, 7$. Ceci entraînera une perte sur les options égale à :

(10$ — 10,70$) × 20 × 100 = 20.000$ — 21.400$ = —1.400 $

Si au contraire le cours de l'action baisse de 1 $, l'investisseur subit une perte sur les action de 1.400 $ et puisque le prix de l'option va également baisser de 0,7 $ il réalise un gain sur sa position en option qui s'élève à 1.400 $.

Dans cet exemple, le delta de la position en options est égal à 0, 7 × (—2.000) = -1.400.

Autrement dit, l'investisseur perd 1.400 $\delta$S sur sa position de vendeur d'options si le cours de l'action augmente de $\delta$S. Le delta de l'action est égal à 1 et la position longue sur 1.400 actions à une delta egal à 1.400. Le delta global de l'investisseur est donc nul. Le delta de la position sur actions compense donc le delta de la position sur options. Une position dont le delta est nul est appelée position delta-neutre.

Il est important de comprendre que puisque le delta varie, la position de l'investisseur de- meure couverte en delta neutre seulement dans un intervalle de temps relativement court. La couverture doit être réajustée périodiquement. En effet, une augmentation du cours de l'action entraîne une augmentation de la pente de la droite tangente à la courbe en ce point, donc une augmentation du delta, il faudrait alors acheter plus d'actions pour maintenir la couverture. La technique de couverture par le delta est un exemple de couverture dynamique.

Le delta est très lié à l'analyse de Black et Scholes. Ceux-ci ont montré qu'il était possible de construire un portefeuille sans risque consistant à vendre une option et acheter Δ actions. Ainsi, Black et Scholes évaluent les options en établissant une position delta neutre et en montrant qu'une telle position doit être rémunérée au taux sans risque.

**3.1. Delta d³une option européenne sur action**

- Pour un call européen portant sur une action ne versant pas de dividendes, le delta est égal à :

$\Delta = N(d_1)$

Le delta d'un call est toujours positif. Constituer une couverture delta-neutre impliquant un call nécessite :

(a) Une position courte sur un call implique de conserver une position longue sur N (d1) actions.

(b) Une position longue sur un call implique de maitenir une position courte sur N (d1) actions.

- Pour un put européen portant sur une action ne versant pas de dividendes, le delta est égal à :

$\Delta = N(d1) - 1$

Le delta d'un put est toujours négatif. Constituer une couverture delta-neutre impliquant un put nécessite :

(a) Une position longue sur un put implique de conserver une position longue sur N (d1) - 1 actions.

(b) Une position courte sur un put implique de maintenir une position courte sur N (d1)-1 actions.

### 3.2. Delta des autres options européennes

- Pour les calls européens portant sur un actif versant un flux continu au taux q, on a

$$\Delta = e^{-qT} N(d_1)$$

- Pour le put européen correspondant

$$\Delta = e^{-qT} \left(N(d_1) - 1\right)$$

Lorsque l'actif sous-jacent est un indice, ces formules sont correctes si q désigne le rendement en dividende de l'indice. Lorsque le sous-jacent est un devise, q est le taux d'intérêt sans risque étranger, rf .

**Exemple numérique**

Une banque française vend un put à 6 mois portant sur 1.000.000 GBP , avec un prix d'exercice de 1GBP = 1, 60 EUR et désire établir un portefeuille delta-neutre. Le taux de change actuel est de 1GBP = 1, 62 EUR, le taux d'intérêt sans risque en Grande Bretagne est de 13%, le taux sans risque en France est de 10% et la volatilité de la livre sterling est de 15%.

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(S_0/K) + (r - r_f + \sigma^2/2)\,T}{\sigma\sqrt{T}} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{1{,}62}{1{,}60}\right) + (0,1 - 0,13 + 0,15^2/2) \times 0,5}{0,15\sqrt{0,5}} = 0,0287 \\ N(d_1) &= 0,5115 \\ &\Rightarrow (N(d_1) - 1)\, e^{-r_f T} = -0,458 \end{aligned}$$

Il s'agit du delta d'une position longue sur un put (si le taux de change augmente de $\delta$S, le put baisse de 45, 8% de $\delta$S). Le delta de la position courte totale sur l'option est de +458.000. Pour établir une position delta-neutre, nous devons donc rajouter une position courte sur la livre sterling d'un montant de 458.000 GBP à la position sur l'option.

### 3.3.Delta des contrats forward

Le concept de delta peut être appliqué à des instruments financiers autres que les options. Considérons un contrat forward portant sur une action ne versant pas de dividendes. Sachant que la valeur d'un contrat forward à tout instant est égale à $S_0$ - K $e^{-rT}$ , quand le cours de l'action change de 6S, toutes choses étant égales par ailleurs, la valeur d'un contrat forward varie de $\delta$S. Le delta d'un contrat forward portant sur une seule action est toujours égal à 1. Cela signifie qu'une position courte sur un contrat forward peut être couverte par l'achat d'une action. Au contraire une position longue sur un contrat forward peut être couverte par la vente à découvert d'une action. Cette couverture ne nécessite aucun changement de position dans l'action durant la vie du contrat. Pour un actif versant un revenu de taux q, le delta du contrat forward sera égal à $e^{-qT}$.

### 3.4.Delta des contrats futures

Puisque le prix futures d'un contrat portant sur des actions ne versant pas de dividendes est égal à $S_0 e^{rT}$, cela montre que lorsque le cours de l'action varie de 6S, toutes choses étant égales par ailleurs, le prix futures varie de $\delta Se^{rT}$ . Puisque les prix futures sont cotés sur le marché quotidiennement, le propriétaire d'un contrat futures (position longue) réalise immédiatement un gain égal à ce montant. Le delta d'un futures est donc égal à $e^{rT}$ . Pour un contrat futures portant sur un actif qui verse un dividende au taux q, le delta est égal à $e^{(r-q)T}$. Il est intéressant de remarquer que les deltas des futures et des forwards sont légèrement différents par le simple fait que l'un est coté sur un marché organisé et l'autre sur un marché OTC. Parfois, un contrat futures est utilisé pour obtenir une position delta-neutre. Notons :

- T : La maturité des contrats futures.
- $H_A$ : La position sur un actif nécessaire pour une couverture delta-neutre.
- $H_F$ : La position alternative sur un contrat futures nécessaire pour une couverture delta-neutre.

Si l'actif sous-jacent est une action qui ne verse pas de dividendes, l'analyse que nous venons d'effectuer montre que :

$$H_F = e^{-rT} H_A$$

Quand l'actif sous-jacent verse un dividende au taux q, nous obtenons :

$$H_F = e^{-(r-q)T} H_A$$

Pour un indice, q est le rendement en dividende de l'indice. Pour une devise, c'est le taux sans risque étranger et nous obtenons :

$$H_F = e^{-(r-rf)T} H_A$$

Considérons l'option de l'exemple précédent ou la couverture utilisant la devise nécessitait une position courte de 458.000GBP. Une couverture utilisant des futures sur devise à 9 mois impliquerait une position courte sur futures de :

$$e^{-(0,1-0,13)\times\frac{9}{12}} \times 458.000 = 468.422GBP$$

Puisque chaque contrat futures porte sur 62.500GBP, une position courte sur $\frac{468\,442}{62\,500} \approx 7$ contrat pourrait être réalisée.

### 3.5. Aspects dynamiques de la couverture sur le delta

Nous reprenons l'exemple suivant ou l'institution financière a vendu pour 300.000 $ de calls européens portant sur 100.000 actions :

$$\begin{aligned} S_0 &= 49\$, \quad K = 50\$, \quad r = 5\%, \quad \sigma = 0,2 \ et \ T = 20 \ semaines = 0,3846 \ années. \\ d_1 &= \frac{\ln(S_0/K) + (r+\sigma^2/2)\,T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln\left(\frac{49}{50}\right) + (0,05 + 0,2^2/2) \times 0,3846}{0,2\sqrt{0,3846}} = 0,054 \\ \Delta &= N(d_1) = 0,522 \end{aligned}$$

Dès que l'option est vendue, 2.557.800 $ doivent être empruntés pour acheter 0,522*100.000 = 52.200 actions au cours de 49$ l'action. Le taux sans risque est de 5%. Un coût de 2.557.800 $e^{0,05*\frac{1}{52}} - 2.557.800 = 2500$ $ est donc encouru la première semaine au titre des intérêts sur l'emprunt. La couverture est censée être ajustée chaque semaine. Les tableaux suivants présentent la couverture par le delta.

| Semaine | Cours de l'action | Delta | Actions achetées | Coûts des actions comprenant les intérêts | Coûts cumulés | Coûts d'intérêts |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 49,00 | 0,522 | 52.200 | 2.557.800 | 2.557.800 | 2.500 |
| 1 | 48,12 | 0,458 | −6.400 | −308.000 | 2.252.300 | 2.200 |
| 2 | 47,37 | 0,400 | −5.800 | −247.700 | 1.979.800 | 1.900 |
| 3 | 50,25 | 0,596 | 19.600 | 984.900 | 2.966.600 | 2.900 |
| 4 | 51,75 | 0,693 | 9.700 | 502.000 | 3.471.500 | 3.300 |
| 5 | 53,12 | 0,774 | 8.100 | 430.300 | 3.905.100 | 3.800 |
| 6 | 53,00 | 0,771 | −300 | −15.900 | 3.893.000 | 3.700 |
| 7 | 51,87 | 0,706 | −6.500 | −337.200 | 3.559.500 | 3.400 |
| 8 | 51,38 | 0,674 | −3.200 | −164.400 | 3.398.500 | 3.300 |
| 9 | 53,00 | 0,787 | 11.300 | 598.900 | 4.000.700 | 3.800 |
| 10 | 48,88 | 0,550 | −23.700 | −1.182.200 | 2.822.300 | 2.700 |
| 11 | 48,50 | 0,413 | −13.700 | −664.400 | 2.160.600 | 2.100 |
| 12 | 49,88 | 0,542 | 12.900 | 643.500 | 2.806.200 | 2.700 |
| 13 | 50,37 | 0,591 | 4.900 | 246.800 | 3.055.700 | 2.900 |
| 14 | 52,13 | 0,768 | 17.700 | 922.700 | 3.981.300 | 3.800 |
| 15 | 51,88 | 0,759 | −900 | −46.700 | 3.938.400 | 3.800 |
| 16 | 52,87 | 0,865 | 10.600 | 560.400 | 4.502.600 | 4.300 |
| 17 | 54,87 | 0,978 | 11.300 | 620.000 | 5.126.900 | 4.900 |
| 18 | 54,62 | 0,990 | 1.200 | 65.500 | 5.197.300 | 5.000 |
| 19 | 55,87 | 1,000 | 1.000 | 55.900 | 5.258.200 | 5.100 |
| 20 | 57,25 | 1,000 | 0 | 0 | 5.263.300 | |

D'après le tableau, le cours de l'action tombe à la fin de la première semaine à 48, 12$. Le delta baisse alors à 0, 458 et 6.400 actions seront alors vendues pour maintenir la couverture. Cette stratégie engendre 308.000$ de liquidités et l'emprunt (en intégrant les intérêts à la fin de la première semaine) est réduit d'autant pour atteindre le niveau de 2.252.300 $ . Vers la fin de la vie de l'option, à la semaine 20, il devient évident que l'option sera exercée et le delta approchera de la valeur 1. A la semaine 20 la position est entièrement couverte. Le vendeur de l'option recevra 5.000.000 $ en échange de la livraison de ses actions conformément au contrat d'option et le coût total de couverture de ces 20 contrats d'options d'achat se montera à 263.000 $. Le coût de couverture de l'option, lorsqu'on l'actualise en début de période, est proche mais pas exactement identique à l'évaluation de Black et Scholes de 240.000 $. Si le procédé de couverture fonctionnait parfaitement, le coût de cette protection serait après actualisation, exactement égal à celui de Black et Scholes, quelle que soit la simulation de trajectoires de cours de l'action qui serait traitée. La raison de l'écart dans le coût de couverture par le delta réside dans le fait que la protection n'est réajustée qu'une fois par semaine. Si l'ajustement est plus fréquent l'écart se trouve réduit. Le but de la couverture en delta est de maintenir une valeur de position pour l'institution financière aussi proche que possible de la valeur initiale.

Le procédé de couverture en delta crée en effet une position longue synthétique en option. Celle-ci neutralise la position courte résultant de l'option vendue. Cette technique suppose généralement de vendre les actions juste après que leur cours a baissé et de les acheter juste après une hausse. Le coût de 240.000 $ provient de la moyenne des différences entre le prix payé pour les actions et le montant obtenu lors de leur vente.

**3.6.Delta d³un portefeuille**

Le delta d'un portefeuille d'options ou d'autres produits dérivés qui dépendent d'un seul actif de valeur S est :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial S}$$

où N représente la valeur du portefeuille.

Le delta du portefeuille peut être calculé à partir des deltas de chacune des options du portefeuille prises individuellement. Si un portefeuille est constitué d'une quantité $w_i$ d'une option i ($1 \leq i \leq n$) , le delta du portefeuille est obtenu par :

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta_i$$

où $\Delta i$ représente le delta de l'option i. La formule peut être utilisée pour calculer la position dans l'actif sous-jacent nécessaire à la constitution d'une couverture par le delta. Lorsque cette position a été établie, le delta du portefeuille est nul (position delta neutre).

Supposons qu'une institution financière française ait les trois positions suivantes dans des options sur le dollar australien :

- Une position longue dans 100.000 calls de prix d'exercice 1AUD = 0, 55EUR et d'échéance à 3 mois. Le delta de chaque option est de 0, 533.

- Une position courte dans 200.000 calls de prix d'exercice 1AUD = 0, 56EUR et d'échéance à 5 mois. Le delta de chaque option est de 0, 468.

- Une position courte dans 50.000 puts de prix d'exercice 1AUD = 0, 56 EUR et d'échéance à 2 mois. Le delta de chaque option est de - 0, 508.

Le delta de l'ensemble du portefeuille est égal à :

100.000 × 0, 533 — 200.000 × 0, 468 — 50.000 × (- 0, 508) = -14.900

Cela signifie que le portefeuille peut être rendu delta-neutre avec une position longue de 14.900 dollars australiens.

Maintenir une position delta-neutre dans une seule option et un actif sous-jacent de la façon qui vient d'être décrite est susceptible de devenir prohibitif en raison des coûts de transactions. Constituer une position de couverture en delta-neutre est plus facile si le portefeuille d'options est important. Un seul échange de titres est nécessaire pour remettre à zéro la position delta de l'ensemble du portefeuille. Les coûts de transaction liés à la couverture sont alors compensés par les résultats obtenus sur les différents échanges.

## 4. Gamma

Le gamma d'un portefeuille d'options, noté F, est le taux de variation du delta du portefeuille en fonction de la valeur de l'actif sous-jacent. C'est la dérivée seconde de la valeur du portefeuille par rapport au cours de l'actif :

$$\Gamma = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2}$$

Si le gamma est faible, le delta varie lentement, et il n'est pas nécessaire d'ajuster fréquemment le portefeuille pour maintenir un portefeuille delta-neutre. Par contre, si le gamma est important en valeur absolue, le delta est très sensible aux variations du cours de l'actif sous-jacent. Il est alors risqué de laisser un portefeuille delta-neutre inchangé trop longtemps.

Supposons que $\partial$S représente la variation du cours de l'actif sous-jacent durant un intervalle de temps infinitésimale de longueur $\partial$t et que $\partial$N soit la variation de la valeur du portefeuille considéré. Si les termes en 6t sont ignorés, nous pouvons montrer que pour un portefeuille delta-neutre, nous avons :

$$\partial \Pi = \frac{1}{2} \Gamma \partial S^2$$

Plus la valeur absolue du gamma augmente, plus la sensibilité de la valeur du portefeuille augmente. Supposons que le gamma d'un portefeuille d'options delta-neutre soit de —10.000, si le cours de l'actif sous-jacent subit une variation de +2 ou -2 sur une courte période de temps, la valeur du portefeuille varie d'environ 0,5 × 10.000 × 22 = 20.000$.

Pour un call ou un put européen portant sur une action ne versant aucun dividende, le gamma s’écrit :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{N'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}} \\ N'(d_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \\ d_1 &= \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}} \end{aligned}$$

Le gamma est toujours positif. Les options à la monnaie ayant une durée de vie très courte ont des gammas très élevés, elles sont donc très sensibles aux variations brutales du cours de l'action.

### 4.1.Etablir un portefeuille gamma-neutre

Une position dans l'actif sous-jacent même ou une position dans un contrat forward sur cet actif ont toutes deux un gamma nul et ne peuvent pas être utilisées pour modifier le gamma d'un portefeuille. Il est nécessaire de prendre une position dans un instrument tel qu'une option qui n'est pas liée linéairement à l'actif sous-jacent. Supposons qu'un portefeuille delta-neutre ait un gamma égal à $\Gamma$ et qu'une option négociable ait un gamma égal à $\Gamma_T$ . Si le nombre d'options ajoutées au portefeuille est $w_T$ , le gamma du portefeuille est alors égal à :

$$\omega_T \Gamma_T + \Gamma$$

Ainsi, la position en options nécessaire pour établir un portefeuille gamma-neutre est : $-\frac{r}{r_T}$

Toutefois, ajouter une option négociable risque de modifier également le delta du portefeuille et nécessite donc de changer la position dans l'actif sous-jacent pour maintenir la neutralité du delta. Il est à noter que le portefeuille est en gamma-neutre seulement pour une courte période de temps. Au fur et à mesure que le temps s'écoule, la neutralité du gamma ne peut être maintenue que si la position dans l'option négociable est ajustée de manière à être toujours égale à : $-\frac{r}{r_T}$

La neutralité du delta permet une protection contre une modeste variation du cours de l'actif, entre deux ajustement. La neutralité du gamma permet une protection contre des variations du cours de l'actif d'amplitude plus importante, entre deux dates d'ajustement de la couverture.

Supposons qu'un portefeuille soit delta-neutre et qu'il est ait un gamma de 3:000: Le delta et le gamma d'une option d'achat donnée sont respectivement de 0,62 et 1,50: Le portefeuille peut être établi en gamma-neutre en lui ajoutant une position longue de :

$$\frac{3.000}{1,5} = 2.000 \text{ options.}$$

Néanmoins, le delta du portefeuille sera modifié de zéro à 2.000 × 0,62 = 1.240. Il faudrait donc vendre une quantité de l'actif sous-jacent représentant 1.240 pour conserver un portefeuille delta-neutre.

Dans la pratique les traders qui gèrent d'importants portefeuilles dépendant d'un seul actif sous-jacent maintiennent le delta-neutre au moins une fois par jour en échangeant l'actif sous- jacent. Malheureusement un gamma-neutre est moins facile à maintenir en raison de la difficulté de trouver des options ou autres produits dérivés non linéaires dans les volumes requis et ce à des prix compétitifs.

## Références bibliographiques

Taleb N. , Dynamic HEDGING. Managing Vanilla and Exotic Option , New York, Wiley, 1996.

Hull, J. C., 2011, Options, futures et autres actifs dérivés, 6ème edition, Pearson Canada.

Hallel M. , L'évaluation des actifs conditionnels, support de cours IFID, 2008

Octave Jokung Nguéna, mathématiques et gestion financière, applications avec exercices corrigés, de boeck, 2004.

Jean Philippe Argaud, Olivier Dubois, 2006 , méthodes mathématiques pour la finance : valorisation des produits et gestion des risques de marchés, Ellipses éditions.

Dalbarade, Jean Marcel (2005) : mathématiques des marchés financiers , 3eme Edition , Economica , Paris.

Bellalah M., et Simon Y., Option, Contrat à terme et gestion de risque, 2 ème édition, Economica, Paris, 2003.

BOISSONNADE J, les options : concepts et applications, Edition ESKA, 1997.

KACHKACH O ., Tout savoir sur les warrants, collection CITY & YORK, Paris, 2006.

Tjomb Bell , Maitriser les produits dérivés en partant de zéro, Amazone, 2015

Mamoghli Chokri, Risques et marchés financiers, Support de cours IFID, 2008.

## Série d'exercices

### Questions théoriques

1- Expliquer comment une stratégie stop-loss peut être mise en place par le vendeur d'un call en dehors de la monnaie. Pourquoi cette couverture est-elle relativement insatisfaisante ?

2- Que signifie l'affirmation selon laquelle le delta d'un call est égal à 0,7

3- Comment une position courte sur 1 000 options peut-elle être établie delta neutre si le delta de chaque option est de 0,7 ?

4- Que signifie l'affirmation selon laquelle le thêta d'une position en options est de 0.1 (le temps étant mesuré en années) ? Si un trader pense que ni le cours de l'action ni sa volatilité ne changeront, quel type de position en options est appropriée ?

5- Qu'entend-on par gamma d'une option ? Quels sont les risques d'une position négatif et delta nul ?

### Exercice 1

Calculez le delta d'un call européen à 6 mois, à la monnaie, portant une action ne versant pas de dividendes si le taux sans risque est de 10 % par an et que la volatilité du cours de l'action est de 25 % par an.

### Exercice 2

La valeur, selon le modèle de Black et Scholes, d'un call européen en dehors de la monnaie avec un prix d'exercice de 40 € est de 4 €. Un trader qui a vendu cette option prévoit d'utiliser une stratégie à seuil de déclenchement. Ainsi, il prévoit d'acheter à 40,10 € et de vendre à 39,90 €. Estimez l'espérance du nombre de fois où l'action sera achetée ou vendue.

### Exercice 3

Supposons que le cours d'une action soit actuellement de 20 € et qu'un call synthétique de prix d'exercice 25 € soit créé par une position sur l'action ajustée dynamiquement. Considérez les deux scénarios suivants :

a. Le cours de l'action augmente de façon constante de 20 € à 35 € durant la viede l'option.

b. Le cours de l'action oscille de façon aléatoire et termine à 35 €. Quel scénario rend l'option synthétique la plus coûteuse ? Justifiez votre réponse.

## Exercice 4

Quel est le delta d'une position courte de 1 000 calls européens portant sur des futures sur l'argent ? L'échéance des options est à 8 mois et les contrats futures sous-jacents arrivent à maturité dans 9 mois. Le cours actuel des futures à 9 mois est de 8 € l'once (28,35 g), le prix d'exercice de l'option est de 8 € , le taux d'intérêt sans risque de 12 % par an et la volatilité de l'argent de 18 % par an.

# Chapitre 4 :

# Les Swaps

**Introduction**

Les premiers swaps furent négociés au début des années quatre-vingt. Depuis, ces marchés ont connu une croissance considérable. Un swap est un accord entre deux entreprises pour échanger des flux de trésorerie dans le futur. Cet accord définit les dates auxquelles ces cash-flows seront échangés et la façon dont ils seront calculés. Généralement, ils dépendent d'une ou plusieurs variables économiques comme un taux d'intérêt ou un taux de change.

Un contrat forward peut être vu comme un swap. Si, le 1er mars 2006, une entreprise prend une position longue sur un contrat forward pour acheter 100 onces d'or à 400 USD l'once dans un an, elle pourra vendre l'or dès qu'elle l'aura reçu. Le contrat forward est alors équivalent à un swap dans lequel l'entreprise s'engage à payer 40 000 USD le 1er mars 2007 et à recevoir 100 S, où S est le prix de l'once d'or à cette date.

Alors qu'un contrat forward correspond à un échange de flux à une date unique, les swaps comportent des échanges à plusieurs dates. Dans ce chapitre, nous analysons ces contrats, la façon dont ils sont construits et leur évaluation. Ce chapitre est centré sur les swaps de taux standard (ou vanille) et sur les swaps de devises.

# I- Les swaps de taux

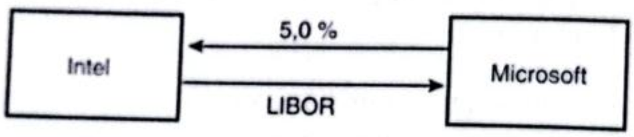
## 1. Le fonctionnement des swaps de taux

Le swap le plus courant est le swap de taux « vanille » (plain vanilla). Dans un tel contrat, une entreprise s'engage à payer des cash-flows égaux aux intérêts à taux fixe sur un principal donné, pendant un certain nombre d'années, et en retour, elle reçoit des intérêts à un taux variable sur le même principal pendant la même durée.

**Illustration**

Considérons un swap hypothétique à 3 ans entre deux entreprises, Microsoft et Intel par exemple, initié le 5 mars 2007. Microsoft s'engage à payer un taux d'intérêt de 5 % à Intel sur un principal de 100 millions de dollars ; en retour Intel s'engage à payer des intérêts à Microsoft au taux LIBOR 6 mois. Les flux seront échangés tous les six mois et le taux fixe de 5 % est en composition semestrielle. Le diagramme du swap est représenté dans le graphique suivant.

**Graphique 1** : Swap de taux entre Microsoft et Intel.




Le premier échange de flux du swap interviendra le 5 septembre 2007, six mois après la conclusion du contrat. Microsoft doit payer 2,5 millions de dollars à Intel, qui représentent l'intérêt pendant la période de six mois sur le principal de 100 millions. Mais Intel doit payer à Microsoft l'intérêt au taux LIBOR 6 mois qui prévalait le 5 mars, sur le même principal. Si, par exemple, ce taux était à 4,2 %, Intel doit payer à Microsoft 2,1 millions. On peut voir qu'il n'y a aucune incertitude sur ce premier échange puisque le LIBOR était observable le 5 mars.

Le deuxième échange sera réalisé le 5 mars 2008. Microsoft doit payer à nouveau 2,5 millions alors qu'Intel paie l'intérêt au LIBOR 6 mois constaté le 5 septembre 2007. Si ce taux est par exemple de 4,8 %, Intel paie 2,4 millions.

Au total il y aura six échanges de flux sur ce swap de 3 ans. Les paiements de Microsoft seront systématiquement de 2,5 millions, alors que ceux d'Intel changeront avec l'évolution du LIBOR 6mois. Le swap est généralement conçu pour que seule la différence d'intérêts soit réglée par la partie qui doit payer le montant le plus élevé.

Dans notre exemple, Microsoft paierait, le 5 septembre 2007, 2,5 - 2,1 = 0,4 million à Intel et 2,5 - 2,4 = 0,1 million le 5 mars 2008.

Le tableau 1 fournit l'ensemble des paiements du swap, du point de vue de Microsoft. On peut noter que le principal de 100 millions ne sert qu'à calculer les intérêts, il n'est pas échangé. S'il l'était à la fin de la durée de vie du swap, cela ne changerait pas les flux nets, comme le montre le tableau suivant. Cependant, cette présentation permet de voir le swap sous un autre angle. Les cash-flows de la troisième colonne sont ceux d'une position longue sur une obligation à taux variable, alors que ceux de la quatrième colonne sont ceux d'une position courte sur une obligation à taux fixe. Le swap peut donc être appréhendé comme l'échange d'une obligation à taux fixe contre une obligation à taux variable.

**Tableau 1 :** Cash-flows de Microsoft pour un swap à 3 ans de principal 100 millions quand le taux fixe est 5 % et le taux variable est le LIBOR 6 mois

| Date | LIBOR 6 mois (en %) | Flux variable | Flux fixe | Flux net |
|---|---|---|---|---|
| 5 mars 2007 | 4,20 | | | |
| 5 septembre 2007 | 4,80 | 2,10 | –2,50 | –0,40 |
| 5 mars 2008 | 5,30 | 2,40 | –2,50 | –0,10 |
| 5 septembre 2008 | 5,50 | 2,65 | –2,50 | 0,15 |
| 5 mars 2009 | 5,60 | 2,75 | –2,50 | 0,25 |
| 5 septembre 2009 | 5,90 | 2,80 | –2,50 | 0,30 |
| 5 mars 2010 | 6,40 | 2,95 | –2,50 | 0,45 |

Microsoft, dont la position est décrite dans le tableau 2, a une position longue sur l'obligation à taux variable, et courte sur l'obligation à taux fixe. La position d'Intel est symétrique. Cette présentation du swap explique pourquoi le taux variable est défini six mois avant le paiement effectif; en effet, sur une obligation à taux variable, le taux d'intérêt est généralement déterminé en début de période et le coupon correspondant payé en fin de période.

**L'utilisation des swaps pour transformer un engagement**

Pour Microsoft, le swap pourrait être utilisé pour transformer une dette à taux variable en dette à taux fixe. Supposons que Microsoft ait contracté une dette de 100 millions au taux LIBOR + 10 points de base, que nous noterons LIBOR + 10 (rappelons que 1 point de base est égal à 0,01 %). Dès la mise en place du swap, trois ensembles de cash-flows interviennent :

- Le paiement de LIBOR + 10 à ses prêteurs.
- La réception du LIBOR sur le swap.

**Tableau 2** : Cash-flows (en millions de dollars) du tableau précédant avec un échange du principal à l'échéance du swap

| Date | LIBOR 6 mois (en %) | Flux variable | Flux fixe | Flux net |
|---|---|---|---|---|
| 5 mars 2007 | 4,20 | | | |
| 5 septembre 2007 | 4,80 | 2,10 | –2,50 | –0,40 |
| 5 mars 2008 | 5,30 | 2,40 | –2,50 | –0,10 |
| 5 septembre 2008 | 5,50 | 2,65 | –2,50 | 0,15 |
| 5 mars 2009 | 5,60 | 2,75 | –2,50 | 0,25 |
| 5 septembre 2009 | 5,90 | 2,80 | –2,50 | 0,30 |
| 5 mars 2010 | 6,40 | 102,95 | –102,50 | 0,45 |

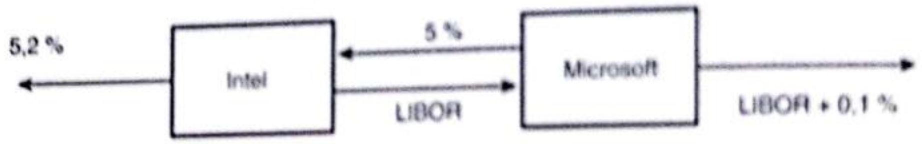
- Le paiement de 5 % sur le swap.

Ces trois ensembles de cash-flows sont équivalents à un emprunt à taux fixe à 5,1 %. De la même façon, pour Intel, ce swap pourrait être employé pour transformer une dette à taux fixe en dette à taux variable. Supposons qu'Intel ait contracté un emprunt au taux fixe de 5,2 % pour 100 millions. Après la mise en place du swap, trois types de cash-flows seront reçus ou payés par Intel.

- Le paiement de 5,2 % à ses préteurs.
- La réception de 5 % sur le swap.
- Le paiement du LIBOR sur le swap.

En définitive, ces cash-flows sont équivalents à un emprunt à taux variable LIBOR + 20. Pour Intel, ce swap aurait pour effet de transformer la dette initiale à taux fixe en dette à taux variable (voir graphique 2).

**Graphique** 2: Transformation d'engagements de Microsoft et Intel par un swap



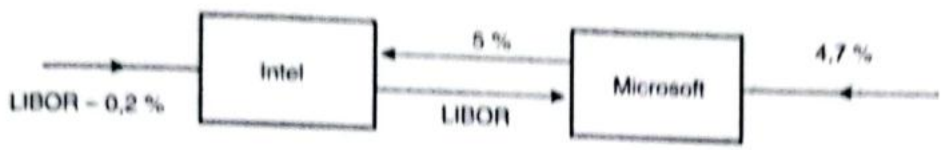

**Utilisation d'un swap pour transformer un actif**

Comme dans la section précédente, un swap peut aussi servir, pour Microsoft, à transformer un actif rapportant un taux fixe en un actif rapportant un taux variable. Supposons que Microsoft détienne un portefeuille d'obligations de 100 millions qui paient 4,7 % de taux de coupon (coupon payé semestriellement) dans les trois prochaines années. Après la mise en place du swap, trois séries de cash-flows entrent en jeu :

- L'encaissement de 4,7 % le portefeuille d'obligations,
- La réception du LIBOR le swap
- Le placement de 5 % sur le swap,

En fin de compte, le portefeuille d'obligations taux fixe a été transformé en un portefeuille obligataire à taux variable rapportant LIBOR 30, Symétriquement, si Intel possède un portefeuille d'obligations à taux variable rapportant LIBOR 20, le swap permet de transformer ce portefeuille en portefeuille de titres à taux fixe rapportant 4,8 % (voir graphique 3 ),

**Graphique 3** : Transformation d'actifs de Microsoft et Intel par un swap,



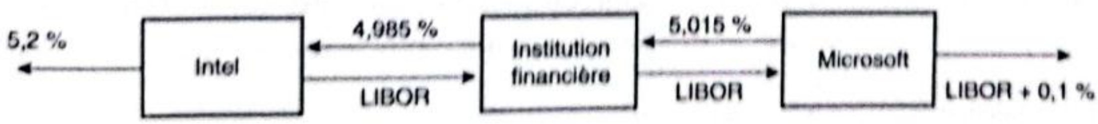
**Le rôle d'intermédiaire**

En général, deux entreprises industrielles comme Intel et Microsoft ne contractent pas directement, comme nous l'avons illustré dans les graphiques 2 et 3. Elles vont recourir à un intermédiaire financier, Les swaps vanille taux fixe contre taux variable sont généralement proposés par les institutions financières pour que leur profit d'intermédiaire soit de l'ordre de 3 ou 4 points de base sur des transactions symétriques comme celle qui a été évoquée précédemment.

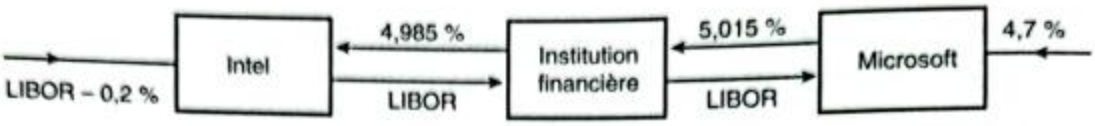
Le graphique 4 montre le rôle de l'intermédiaire dans la situation du graphique 2 . Le profit de l'intermédiaire vient de l'écart de taux fixe entre ce qui est payé par Microsoft (5,015 %) et ce qui est reçu par Intel (4,985 %). S'il n'y a pas défaut d'une des deux parties, l'intermédiaire s'assure un profit de 3 points de base par an, multiplié par le principal du swap. En définitive, Microsoft emprunte à 5,115 % (au lieu des 5,1 % du graphique précédant) et Intel emprunte à LIBOR + 21,5 au lieu de LIBOR + 20.

Le graphique 5 illustre le rôle de l'intermédiaire dans la situation du graphique 3 . Ici encore, le profit de l'intermédiaire est 3 points de base si les parties prenantes ne font pas défaut. Microsoft reçoit LIBOR - 31,5 au lieu de LIBOR - 30, et Intel reçoit 4,735 % au lieu de 4,75 %. Il est bon de noter que l'intermédiaire signe deux contrats séparés, l'un avec Microsoft, l'autre avec Intel, sans que les deux firmes soient même informées qu'il existe une contrepartie autre que l'intermédiaire. Si l'une des deux entreprises fait défaut, l'intermédiaire doit faire face à ses engagements vis-à-vis de l'autre. Les 3 points de base représentent aussi une rémunération pour ce risque.

**Graphique 4 :** Swap du graphique précédant avec un intermédiaire financier.




**Graphique 5 :** Swap du graphique précédant avec un intermédiaire financier.




**Les market-makers**

Dans la pratique, il est improbable que deux entreprises aient besoin au même moment de deux positions parfaitement symétriques. De ce fait, certaines institutions financières jouent le rôle de market-makers sur les swaps. Cela signifie qu'elles sont prêtes, à tout instant, à conclure un swap dans l'une des deux positions (celles de Microsoft et d'Intel dans l'exemple précédent) sans forcément pouvoir immédiatement dénouer la position prise avec une autre contrepartie. Il est alors essentiel pour ces institutions de quantifier précisément et de couvrir le risque encouru. Les obligations, les FRA et les futures de taux sont les instruments privilégiés de cette couverture.

Les institutions financières qui jouent le rôle de market-makers sur les swaps affichent dans différentes devises et pour différentes maturités des taux (offerts et demandés) auxquels elles sont prêtes à conclure un swap. Le taux demandé (bid) est le taux auquel le market-maker accepte de payer le taux fixe et de recevoir le taux variable. Réciproquement, le taux offert est celui auquel il accepte de conclure un swap dans lequel il reçoit le taux fixe et paie le taux variable. Le tableau 3 donne un exemple de ce type de cotations. Le spread pour chaque maturité est de l'ordre de 3 ou 4 points de base. Le milieu de fourchette est appelé taux de swap. Il apparaît dans la dernière colonne du tableau.

**Tableau** 3: Taus offerts et demandés pour un swap

| Maturité (en années) | Demandé (%) | Offert (%) | Taux de swap |
|---|---|---|---|
| 2 | 6,03 | 6,06 | 6,045 |
| 3 | 6,21 | 6,24 | 6,225 |
| 4 | 6,35 | 6,39 | 6,370 |
| 5 | 6,47 | 6,51 | 6,490 |
| 7 | 6,65 | 6,68 | 6,665 |
| 10 | 6,83 | 6,87 | 6,850 |

Considérons un swap dont le taux fixe est le taux de swap. On peut raisonnablement supposer que la valeur du swap est nulle au moment où il est conclu (on ne voit pas pour quelle autre raison le market-maker afficherait ces taux!). Dans le tableau 2 nous avons vu qu'un swap peut être caractérisé par la différence entre une obligation à taux fixe et une obligation à taux variable.

Notons :

$B_{fix}$ : la valeur de l'obligation à taux fixe sous-jacente au swap.

$B_{var}$ : la valeur de l'obligation à taux variable sous-jacente au swap.

Comme la valeur du swap est nulle au moment où il est conclu, on a :

$$B_{var} = B_{fix}$$

Ce résultat sera utilisé ultérieurement pour déterminer la courbe des taux ZC à partir des swaps.

## 2. Les conventions de décompte des jours

La façon de décompter les jours influence les paiements d'un swap. L'exemple donné précédemment négligeait ce point précis.

Considérons à nouveau les taux LIBOR 6 mois du tableau 1 ; ces taux sont le plus souvent en base Exact/360. Le premier paiement du swap, calculé avec un LIBOR à 4.2 %, était de 2,1 millions. Ce calcul, fondé sur 0,5 an, n'était pas tout à fait exact car il y a 184 jours entre le 5 mars 2005 et le 5 septembre de la même année. Le paiement serait en réalité de :

$$100 \times 0{,}042 \times \frac{184}{360} = 2{,}1467 \text{ millions}$$

En général, le flux de la jambe variable (nom donné à la série de cash-flows à taux variable) d'un swap, fondé sur le LIBOR, est calculé comme LxRxn/360, où L est le principal, R est le taux LIBOR pertinent, et n est le nombre de jours depuis le paiement précédent (ou depuis la date de départ du swap s'il s'agit du premier paiement).

De la même façon, les paiements de la jambe fixe sont calculés avec une convention qui peut les faire varier au cours du temps en fonction du nombre de jours entre deux paiements successifs (tous les semestres n'ont pas le même nombre de jours). Pour le taux fixe, la base Exact/365 est la plus courante. On remarque alors que, si cette base est utilisée, les deux taux ne sont pas directement comparables ; le taux LIBOR doit être multiplié par 365/360 pour être comparé au taux fixe, ou le taux fixe doit être multiplié par 360/365 pour être comparé au taux variable. Pour des raisons pédagogiques, nous ferons abstraction de ce point dans les exemples de ce chapitre.

### 3. La confirmation

Il s'agit du document, ayant valeur légale, qui spécifie les termes du contrat et qui est signé par les deux parties. Le premier groupe d'informations spécifie la convention utilisée si une date de paiement est un jour férié ou un week-end. Dans ce cas, le paiement est réalisé le premier jour ouvré qui suit la date de paiement prévue. Les jours fériés, entrant dans l'application de la convention jours ouvrés, sont ceux du calendrier US dans cet exemple.

### 4. L'avantage comparatif

La popularité des swaps est souvent justifiée par l'argument de l'avantage comparatif. Pour un couple d'entreprises donné, la facilité relative d'accès aux marchés des emprunts à taux fixe et à taux variable n'est pas la même. Chaque entreprise aura donc intérêt à emprunter sur le marché qui lui est le plus favorable, quitte ensuite à faire un swap avec l'autre si le type d'endettement contracté (fixe ou variable) ne lui convient pas.

**Illustration**

Deux entreprises, Acorp et Bcorp, souhaitent emprunter 10 millions d'euros pour 5 ans. Les taux qu'elles se voient proposer pour cet emprunt sont reportés dans le tableau 4.

**Tableau** 4: Taux d'emprunt d'Acorp et Bcorp

| | Flux | Variable |
|---|---|---|
| Acorp | 4% | LIBOR+30 |
| Bcorp | 5,20% | LIBOR+100 |

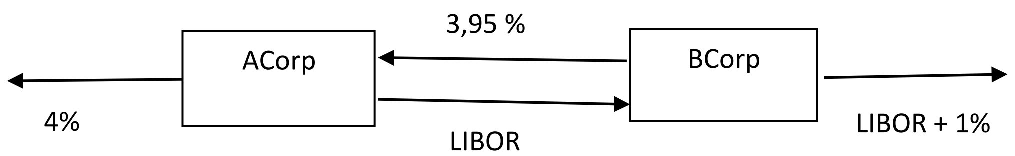
Acorp a un rating AAA, alors que Bcorp est notée BBB. Cette dernière souhaite emprunter à taux fixe alors que Acorp préférerait un emprunt à taux variable, fondé sur le LIBOR 6 mois. Bien sûr, les conditions d'emprunt sont plus défavorables sur les deux marchés pour Bcorp, puisque cette entreprise a un rating plus faible.

L'élément clé qui conduit à l'utilisation d'un swap est le fait que la différence entre les taux auxquels les deux entreprises peuvent emprunter n'est pas la même sur les deux marchés. Elle vaut 1,2 % sur le taux fixe mais seulement 0,7 % sur le taux variable. Bcorp a de ce fait un avantage comparatif sur le taux variable , et Acorp un avantage sur le marché à taux fixe. Acorp va donc emprunter au taux fixe de 4 %, Bcorp au taux variable LIBOR + 100, et les deux sociétés vont conclure le swap décrit dans le graphique 6, très semblable à celui du graphique 2. Acorp paiera le LIBOR 6 mois sur un principal de 10 millions, et Bcorp paiera un taux fixe de 3,95 % sur le même principal. Acorp a donc trois types de cash-flows :

- Paiement de 4 % au préteur.
- Réception de 3,95 % dans le cadre du swap.
- Paiement du LIBOR dans le cadre du swap.

En définitive, le résultat de ces opérations revient à emprunter à LIBOR + 5, soit 25 points de base de moins que le taux proposé initialement.

**Graphique 6** : Swap entre Acorp et Bcorp




Les cash-flows reçus ou payés par Bcorp sont les suivants :

- Paiement de LIBOR + 100 au prêteur.

- Réception de LIBOR dans le cadre du swap.

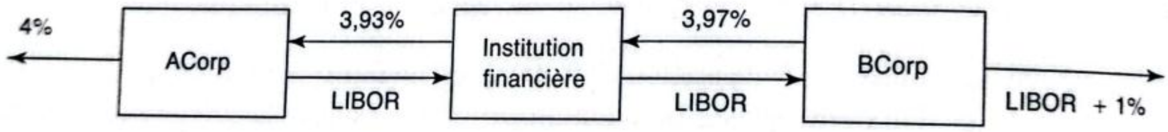
- Paiement de 3,95 % dans le cadre du swap.

Globalement, c'est comme si Bcorp avait emprunté à un taux fixe de 4,95 %, soit 25 points de base de moins que le taux fixe initial. Par le swap, chaque entreprise a gagné 25 points de base. Le gain total est de 0,5 %, différence entre les spreads sur les deux marchés.

$$0{,}5\ \% = (5{,}2\ \% - 4\ \%) - ((\text{LIBOR} + 100) - (\text{LIBOR} + 30))$$

Si les deux entreprises avaient eu recours à un intermédiaire financier, le résultat aurait pu être celui du graphique 7. Dans ce cas, Acorp emprunte à LIBOR + 7. Bcorp à 3,97 %. Chaque entreprise gagne 23 points de base et l'intermédiaire 4 points, ce qui donne toujours un total de 50 points de base.

**Graphique 7 :** Swap entre Acorp et Bcorp




**Critique de l'argument de l'avantage comparatif**

La question est de savoir pourquoi, dans le tableau 4, le spread de taux fixe (1,2 %) est supérieur au spread de taux variable (0,7 %). Alors que le marché des swaps existe depuis longtemps, on peut s'étonner que de telles différences existent encore.

Une des explications concerne la nature des contrats sur chacun des deux marchés. Sur le marché à taux fixe, comme son nom l'indique, le taux est fixé pour toute la durée de l'emprunt. Ce taux est modifié tous les six mois sur le marché à taux variable. Si la note de l'emprunteur vient à se dégrader, le prêteur a la possibilité de modifier l'écart de taux par rapport au LIBOR (qui est au départ de 0,3 % pour Acorp et 1 % pour Bcorp). Les spreads de taux entre les deux sociétés reflètent la différence de qualité entre les deux emprunteurs, résumée par les ratings. Dans les six mois, la probabilité de défaut est minime pour chacune des deux entreprises. A plus long terme, la probabilité de défaut augmente plus rapidement pour Bcorp que pour Acorp, ce qui peut expliquer pourquoi l'écart de taux est plus faible pour les taux variables.

Après négociation du swap, il apparaît que Bcorp emprunte à 4,97 % sur cinq ans. Ce n'est pas tout à fait vrai si la notation se dégrade, car le spread par rapport au LIBOR peut augmenter. S'il passe par exemple à 2 %, le taux fixe de Bcorp devient 5,97 %. De fait, le coût espéré de l'emprunt est supérieur à 4,97 %.

Le swap du graphique 7 fixe le taux d'emprunt d'Acorp à LIBOR + 7, ce qui est avantageux par rapport au LIBOR + 30 initial. L'inconvénient est que l'entreprise supporte le risque de défaut de l'intermédiaire, ce qui n'aurait pas été le cas si elle avait emprunté directement à taux variable.

**5. La nature des taux de swap**

La courbe ZC LIBOR est aussi appelée courbe des taux swap ou courbe swap. Les taux LIBOR de maturité inférieure à un an sont les taux d'emprunt sur le marché interbancaire. Il est tentant de supposer que les taux ZC pour des maturités plus longues sont aussi les taux d'emprunt de ce même marché. Ce n'est pas tout à fait exact.

Supposons en effet que le taux de swap 5 ans soit 5 % et qu'une banque puisse emprunter pour 6 mois au LIBOR. Elle peut conclure un swap pour échanger le LIBOR contre un taux fixe de 5 %, ce qui revient à assurer un taux fixe d'emprunt de 5 %. Comme nous l'avons mentionné précédemment, ce taux s'applique seulement si la banque peut continuer à emprunter au LIBOR. Il existe en fait un risque qualifié de risque de roll-over. Il n'est pas certain qu'elle puisse faire glisser sa position de six mois en six mois aux mêmes conditions. Si le taux d'emprunt à 6 mois vient à augmenter, le taux fixe de 5 % s'élèvera. La courbe ZC LIBOR peut être interprétée comme une courbe définissant les taux d'emprunt seulement si l'on suppose que le risque de roll-over est nul.

## 6. Les taux zéro-coupon déduits des swaps

Nous avons expliqué précédemment que les traders utilisent les taux LIBOR comme taux sans risque quand ils évaluent des actifs dérivés. Un des problèmes associés à cette pratique est que ces taux concernent des maturités inférieures à 12 mois. Comme nous l'avons vu précédemment on peut étendre la courbe LIBOR à des maturités plus longues en utilisant les contrats futures Eurodollar, Pour prolonger cette courbe à des maturités encore plus éloignées, on utilise les taux de swap. On parle alors de courbe LIBOR ou de courbe swap Pour éviter les confusions, nous emploierons souvent l'expression courbe LIBOR/swap.

On peut d'abord noter qu'une nouvelle émission à taux variable indexée sur le LIBOR 6 mois cote à sa valeur faciale quand la courbe LIBOR/swap est utilisée pour l'actualisation des flux de cette obligation". C'est simplement lié au fait que le coupon payé par l'obligation est calculé avec le taux qui sert à actualiser.

Nous avons vu que Bvar = Bfix, pour un swap qui vient d'être émis avec un taux fixe égal au taux de swap. Mais Bar est alors égal au principal notionnel du swap. Il en est de même pour Bfix. Les taux de swap définissent ainsi un ensemble de taux actuariels au pair. Par exemple, dans le tableau précédent, on peut déduire que le taux LIBOR/swap à 2 ans est de 6,045 %, le taux correspondant à 3 ans est de 6,225 %, et ainsi de suite. La méthode la plus courante pour déterminer la courbe LIBOR/swap est la technique du bootstrap.

**Exemple**

Supposons que les taux ZC LIBOR jusqu'à 18 mois de maturité aient déjà été calculés (les taux continus à 6, 12 et 18 mois sont supposés égaux à 4 %, 4,5 %., 4.8 %). Le taux de swap à 2 ans avec paiements semestriels est supposé égal à 5 % par an. Ce taux signifie qu'une obligation à 2 ans payant 5 % de taux de coupon et de nominal 100 € cote 100 €.

Le taux ZC à 2 ans, noté R, est alors solution de l'équation :

$$2{,}5 \times \left(e^{-0{,}04\times 0{,}5} + e^{-0{,}045\times 1} + e^{-0{,}048\times 1{,}5}\right) + 102{,}50 \times e^{-R\times 2} = 100$$

Nous obtenons ainsi R = 4,953 %. Ce calcul est simplifié car nous ne tenons pas compte ici des conventions de décompte des jours.

## 7. L'évaluation des swaps

Au moment où un swap est conclu, sa valeur est nulle, mais par la suite, cette valeur peut devenir négative ou positive. L'évaluation d'un swap peut être assimilée, comme nous l'avons vu, soit à celle d'un portefeuille d'obligations, soit à celle d'un portefeuille de FRA.

**Le swap comme portefeuille d'obligations**

En présentant un swap avec l'échange du principal ( voir tableau 2) , nous savons que la valeur d'un swap peut s'écrire :

$$V = B_{var} - B_{fix}$$

quand le taux variable est reçu et le taux fixe est payé. Nous avons employé cette équation pour montrer que Bfix, est égal au principal du swap au départ du contrat. Nous allons à nouveau recourir à cette équation pour évaluer le swap à une date quelconque. Notons :

t, : la durée jusqu'au i-ième paiement (n paiements au total)

L : le principal du swap

r, : le taux ZC LIBOR pour la maturité t,

k : le paiement de la jambe fixe à chaque date

Ces notations permettent d'écrire $B_{fix}$ ainsi :

$$B_{fix} = \sum_{i=1}^{n} k e^{-r_i t_i} + L e^{-r_n t_n}$$

Après chaque date de paiement, l'obligation à taux variable peut être considérée comme une nouvelle obligation avec une maturité moins longue. Le raisonnement appliqué précédemment permet donc de dire que, juste après une date de paiement, le prix de l'obligation à taux variable est égal au principal du swap. Juste avant une date de paiement, le prix de cette obligation est par conséquent L + k*, où k* est le paiement qui va être effectué sur la jambe variable du swap (il est déjà connu à ce moment-là). Avec les notations définies plus haut, t1 est le délai jusqu'au prochain paiement, et l'on peut donc écrire :

$$B_{var} = (L + k^*) e^{-r_1 t_1}$$

**Exemple**

Considérons une institution financière qui paie le LIBOR 6 mois et reçoit un taux fixe de 8 % (en composition semestrielle) sur un swap de principal 100 millions d'euros. Les dates de paiement restantes se situent dans 3, 9 et 15 mois. Les taux ZC LIBOR continus pour ces trois maturités sont respectivement 10 %, 10,5 % et 11 %. Lors du dernier paiement, le LIBOR 6 mois était de 10,2 % (en composition semestrielle). Dans ce cas, k* = 5,1 millions, k = 4 millions et l'on déduit :

$$B_{fix} = 4 \times e^{-\,0{,}1 \times \frac{3}{12}} + 4 \times e^{-0{,}105 \times \frac{9}{12}} + 104 \times e^{-0{,}11 \times \frac{15}{12}} = 98{,}24\, millions$$

$$B_{var} = 5{,}1 \times e^{-\,0{,}1 \times \frac{3}{12}} + 100 \times e^{-0{,}1 \times \frac{3}{12}} = 102{,}51\, millions$$

La valeur du swap est donc :

98,24 – 102,52 = - 4,27 millions

Si la banque avait été dans la position symétrique recevant la variable et payant le fixe, la valeur du swap aurait été 4,27 millions. Comme nous l'avons déjà mentionné, un calcul plus précis supposerait de tenir compte des conventions en matière de décompte des jours.

**Tableau** 5 : Évaluation d'un swap comme portefeuille d'obligations (en millions de dollars)

| Date | Cash Flow $B_{fix}$ | Cash Flow $B_{fl}$ | Facteur d'actualisation | Valeur actuelle pour $B_{fix}$ | Valeur actuelle pour $B_{fl}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.25 | 4,0 | 105,100 | 0,9753 | 3,901 | 102,505 |
| 0,75 | 4,0 | | 0,9243 | 3,697 | |
| 1.25 | 104,0 | | 0,8715 | 90,640 | |
| Total | | | | 98,238 | 102,505 |

**Valorisation en termes de FRA**

Les FRA ont été introduits au premier chapitre. Ce sont des accords pour l'application d'un taux d'intérêt défini, à un principal donné, pour une période future spécifiée. Nous avons montré qu'un FRA peut être vu comme un accord d'échange entre un taux déterminé et un taux de marché pour la période définie par le contrat. Cela montre qu'un swap n'est rien d'autre qu'un portefeuille de FRA. Le swap entre Intel et Microsoft, engage chacune des deux parties dans une série de six cash-flows. Considérons la position de Microsoft ; le premier échange de flux est connu à la date de négociation du swap et les cinq autres peuvent être analysés comme des FRA. Par exemple, l'opération du 5 mars 2008 est un FRA échangeant un taux fixe de 5 % contre le LIBOR 6 mois observé le 5 septembre 2007. Les autres échanges s'interprètent de la même façon.

Un FRA peut être évalué en supposant que les taux forward seront effectivement les taux spot futurs. On procède alors de la façon suivante :

- Pour chaque taux LIBOR déterminant les cash-flows du swap, on calcule le taux forward correspondant.

- On évalue chaque cash-flow en supposant que le taux LIBOR futur sera le taux forward observé aujourd'hui.

- La valeur du swap est la somme de ces cash-flows actualisés avec la courbe LI- BOR/swap.

**Exemple**

Considérons le swap de l'exemple précédent. Les cash-flows qui seront échangés dans trois mois sont déjà connus. Un taux de 8 % sera échangé contre un taux de 10,2 %. La valeur de cet échange est donc :

$$0{,}5 \times 100 \times (0{,}08 - 0{,}102)\ e^{-0{,}1\times\frac{3}{12}} = -1{,}07$$

Pour calculer la valeur de l'échange dans neuf mois, il faut tout d'abord déterminer le taux forward correspondant à la période 3 mois9 mois, vu d'aujourd'hui. En utilisant l'équation précédente, on obtient :

$$\frac{0{,}105 \times 0{,}75 - 0{,}10 \times 0{,}25}{0{,}5} = 0{,}1075$$

soit 10,75 % en continu. L'équation précédente donne un taux semestriel équivalent de 11.044 %. La valeur du FRA correspondant à l'échange de flux dans neuf mois est donc :

$$0{,}5 \times 100 \times (0{,}08 - 0{,}11044)e^{-0{,}105\times\frac{9}{12}} = -1{,}41$$

La même démarche appliquée à l'échange dans quinze mois donne un taux forward continu de 11,75 %, soit 12,102 % semestriels. La valeur du FRA correspondant est donc :

$$0{,}5 \times 100 \times (0{,}08 - 0{,}12102)e^{-0{,}11\times\frac{15}{12}} = -1{,}79$$

La valeur du swap est donc :

-1,07 – 1,41 – 1,79 = - 4,27 millions

qui, bien sûr, est identique à celle qui a été trouvée dans la section précédente.

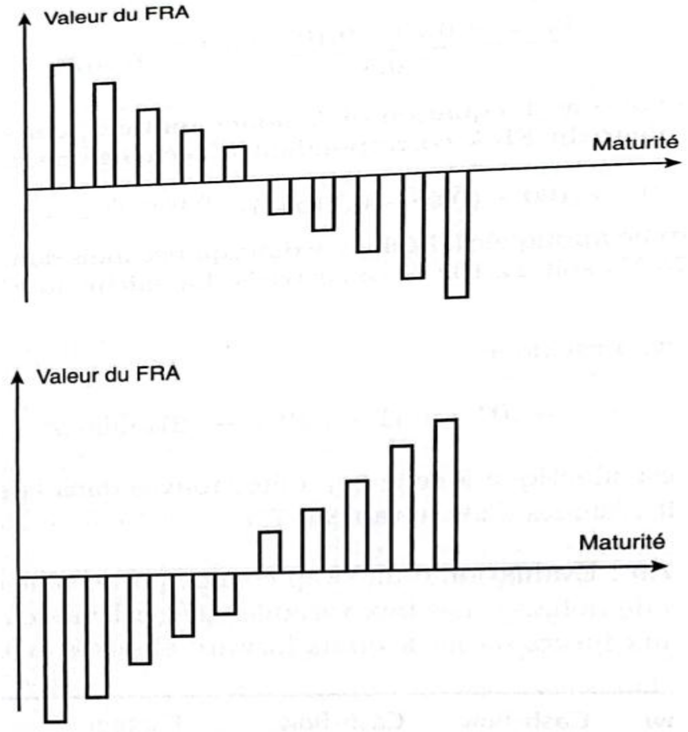
**Tableau 6** : Evaluation d'un swap comme portefeuille de FRA (en millions de dollars). Les flux variables sont calculés en supposant que les taux futurs seront les taux forward observés aujourd'hui.

| Date | Cash-flow fixe | Cash-flow variable | Cash-flow net | Facteur d'actualisation | Valeur actuelle nette |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,25 | 4,0 | −5,100 | −1,100 | 0,9753 | −1,073 |
| 0,75 | 4,0 | −5,522 | −1,522 | 0,9243 | −1,407 |
| 1,25 | 4,0 | −6,051 | −2,051 | 0,8715 | −1,787 |
| Total | | | | | −4,267 |

Précisons que, si la valeur d'un swap est nulle à la date de départ, les valeurs des FRA qui le composent ne le sont pas. C'est la somme de ces valeurs qui s'annule. Certains FRA auront donc une valeur positive et d'autres une valeur négative. Pour le swap entre Microsoft et Intel, la valeur de chaque FRA est négative si le taux forward correspondant est supérieur à 5,015 %, et positive si ce taux est inférieur à 5,015 %.

Considérons une structure par termes des taux ZC croissante au moment où le swap est conclu. Les taux forward sont donc aussi croissants avec l'éloignement dans le temps. Comme la somme de la valeur des FRA est nulle, le taux forward doit être inférieur à 5,015 % pour les maturités proches, et supérieur à cette valeur pour les maturités éloignées. Si la structure par termes est décroissante, la relation est inversée. Le graphique 8 résume ces deux situations.

**Graphique** 8 : Valeur des FRA composant le swap en fonction de la maturité.



## II- Les swaps de devises

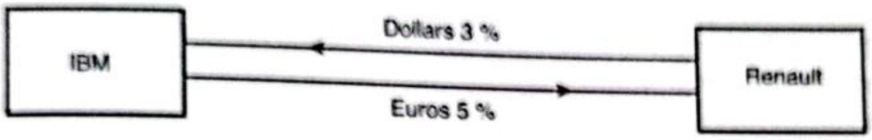
### 1. Le fonctionnement des swaps de devises

Sous sa forme la plus simple, un swap de devises implique l'échange d'un principal et d'intérêts dans une devise contre un principal et des intérêts dans une autre. Un swap de devises nécessite de spécifier le principal dans chacune des deux devises. Ces sommes sont échangées an début et à la fin de la durée de vie du swap, En général, ces montants sont choisis de façon à être équivalents an début du contrat.

**Illustration**

Considérons un swap de devises hypothétique à 5 ans entre IBM et Renault, débutant le 1"" février 2008. IBM paie un intérêt de 5 % par an en euros à Renault et reçoit 3 % en dollars de Renault. Les principaux sont respectivement égaux à 20 millions de dollars et 20 millions d'euros. Les intérêts sont payés une fois par an. Ce swap est décrit dans le graphique 9.

**Graphique 9** : Swap de devise




À la date initiale, les principaux s'échangent dans le sens inverse des flèches apparaissant sur le graphique. Par contre, les intérêts pendant la durée de vie du swap et l'échange final de principal vont dans le sens des flèches. Par conséquent, au démarrage. IBM paie 20 millions de dollars à Renault et Renault paie 20 millions d'euros à IBM. Chaque année, IBM reçoit 0,6 million de dollars (3 % de 20 millions) et paie 1 million d'euros (5 % de 20 millions). À la fin du swap, IBM paie un principal de 20 millions d'euros et reçoit 20 millions de dollars. Ces cash-flows sont résumés dans le tableau suivant.

**Tableau 7** : Flux du swap de devises pour IBM

| Dates | Flux en dollars (millions) | Flux en euros (millions) |
|---|---|---|
| 1** février 2008 | -20 | 20 |
| 1** février 2009 | 0,6 | 1 |
| 1** février 2010 | 0,6 | 1 |
| 1** février 2011 | 0,6 | 1 |
| 1** février 2012 | 0,6 | 1 |
| 1** février 2013 | 20,6 | 21 |

**Utilisation d'un swap de devises pour transformer actifs et emprunts**

Un swap comme celui que nous venons de décrire peut-être utiliser pour transformer un emprunt dans une devise en un emprunt dans une autre devise. Supposons qu'IBM puisse émettre 20 millions d'obligations en dollars au taux de 3 %. Le swap a pour effet de transformer cet emprunt en un emprunt de 20 millions en euros au taux de 5 % L'échange initial a pour résultat de convertir les 20 millions de dollars de l'emprunt en 20 millions d'euros. Les échanges suivants correspondent au paiement des intérêts et au remboursement du principal en euros. Un swap peut aussi être utilisé pour transformer la nature des actifs. Supposons qu'IBM puisse investir 20 millions d'euros en France à 5 % par an pour les cinq prochaines années mais pense que le dollar va se renforcer contre l'euro pendant ce temps. Le swap a pour effet de transformer l'investissement en euros à 5 % en un investissement en dollars à 3 %.

**L'avantage comparatif**

Les swaps de devises peuvent, comme les swaps de taux, être motivés par un argument d'avantage comparatif. Pour illustrer ce point, considérons un autre exemple hypothétique. Les coûts d'emprunt à taux fixe pour cinq ans en euros et en dollars pour Intel et Orange sont donnés dans le tableau suivant. Ces données suggèrent que les taux euro sont plus élevés que les taux US. De même, Intel peut emprunter à des taux moins élevés dans les deux devises. Le point intéressant du tableau suivant est que le spread entre les deux entreprises n'est pas le même sur l'euro et sur le dollar. Orange paie 2 % de plus en dollars, mais seulement 1 % de plus en euros.

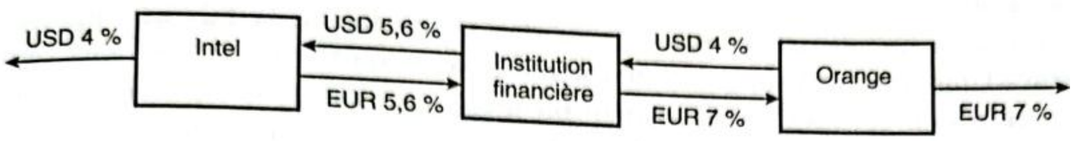
**Tableau 8 :** Taux d'emprunt permettant un swap

| | USD | EUR |
|---|---|---|
| Intel | 4 % | 6 % |
| Orange | 6 % | 7 % |

Cette situation est analogue à celle du tableau 4 . Orange a un avantage comparatif pour les emprunts en euros et Intel pour les emprunts en dollars. Supposons donc qu'Intel souhaite emprunter 20 millions d'euros et Orange 20 millions de dollars et que le taux de change soit de 1 € pour 1 USD. En fait, chacune des deux entreprises va emprunter sur le marché sur lequel elle a un avantage comparatif, et les deux vont conclure un swap qui transformera l'emprunt d'Intel en un emprunt en euros et celui d'Orange en un emprunt en dollars. Par analogie avec les swaps de taux des sections précédentes, on s'attend à ce que le gain total du swap soit de 1 %, qui est la différence entre les spreads sur les deux marchés.

Le graphique suivant illustre une façon d'organiser le swap avec une institution financière comme intermédiaire. Intel emprunte des dollars et Orange des euros. L'effet du swap est de transformer la dette en dollars à 4 % d'Intel en une dette en euros à 5,6 %, et la dette d'Orange en euros à 7 % en une dette en dollars à 5,6 %.

**Graphique 10 :** Swap dont l'origine est l'avantage comparatif.




Le résultat de ce swap est qu'Intel a gagné 40 points de base par rapport à un emprunt direct en euros, Orange a gagné 40 points de base par rapport à un emprunt direct en dollars, et l'institution financière perd 1,4 % sur l'euro mais gagne 1,6 % sur le dollar. En négligeant ici la différence entre les deux devises, le profit est de 20 points de base. Le total des gains pour l'ensemble des parties est, comme on pouvait s'y attendre, de 1 %, différence des spreads entre les deux entreprises sur les deux devises.

Chaque année, l'institution financière gagne 320 000 USD (1,6 % × 20 millions) et perd 280 000 € (1,4 % × 20 millions). Elle peut cependant éviter le risque de change en achetant à terme les 280 000 € pour chaque année de la vie du swap, de façon à fixer son profit en dollars.

## 2. L'évaluation des swaps de devises

Comme les swaps de taux, les swaps de devises peuvent être évalués sous la forme de portefeuilles d'obligations ou en considérant qu'il s'agit d'un portefeuille de contrats forward.

### L'évaluation comme portefeuille d'obligations

En l'absence de risque de défaut, un swap de devises peut être traité comme un portefeuille d'obligations, comme dans les swaps de taux. Considérons la position d'IBM dans le tableau 7 quelque temps après l'échange initial du principal. IBM possède une obligation en dollars rapportant 3 % et a une position de vente à découvert sur une obligation en euros dont le taux de coupon est 5 %. Notons Vswap la valeur en dollars du swap si la devise étrangère est payée et la devise domestique reçue (USD pour IBM). On peut alors écrire :

$$V_{swap} = B_D - S_0\, B_F$$

où $B_F$ est la valeur, en devise étrangère, de l'obligation libellée en devise étrangère sous-jacente au swap, et $B_D$ est la valeur en dollars de l'obligation domestique correspondante. So est le taux de change spot (en nombre d'unités monétaires domestiques par unité monétaire étrangère). En utilisant les taux LIBOR de chacune des deux devises, on peut évaluer les obligations et donc le swap. La valeur du swap est l'opposé de la précédente si la devise étrangère est reçue et la devise domestique payée.

### Exemple

Supposons une structure par termes des taux plats à la fois au Japon et aux États-Unis. Les taux japonais sont à 4 % et les taux US à 9 % (les deux taux sont composés en continu). Une institution financière a conclu un swap à paiements annuels par lequel elle reçoit 5 % en yens et paie 8 % en dollars. Les principaux sont de 10 millions de dollars et de 1,2 milliard de yens. Le swap a encore une durée de vie de trois ans et le taux de change actuel est de 110 JPY pour 1 USD. Dans ce cas,

$$B_D = 0{,}8 \times e^{-0{,}09\times1} + 0{,}8 \times e^{-0{,}09\times2} + 10{,}8 \times e^{-0{,}09\times3} = 9{,}644 \text{ millions d'USD}$$

$$B_p = 60 \times e^{-0{,}04\times1} + 60 \times e^{-0{,}04\times2} + 1260 \times e^{-0{,}04\times3} = 1230{,}55 \text{ millions de JPY}$$

La valeur du swap est donc :

$$\frac{1230{,}55}{110} - 9{,}6439 = 1{,}5430\ million\ d'USD$$

**La décomposition en contrats forward**

Une alternative pour évaluer un swap de devises consiste à le décomposer en une série de contrats forward. Si l'on reste sur l'exemple du tableau 7, IBM a accepté de recevoir 0,6 million de dollars en échange du paiement de 1 million d'euros. De plus, à la fin du contrat, IBM a accepté de recevoir 20 millions de dollars et de payer 20 millions d'euros. Chacun de ces échanges est un contrat forward. Nous avons vu que ces contrats forward peuvent être évalués en supposant que le prix forward aujourd'hui sera le prix spot à l'échéance. Cette démarche fournit un moyen simple d'évaluer les contrats forward et donc le swap.

**Exemple**

Considérons à nouveau l'exemple précédent. Le taux de change est de 110 JPY pour 1 USD, ou encore 0,009091 USD pour 1 JPY. Comme la différence entre les taux d'intérêt est, dans cet exemple, de 5 %, l'équation précédente nous donne le prix forward du dollar à 1, 2 et 3 ans :

$$0{,}009091 \times e^{0{,}05\times1} = 0{,}009557$$
$$0{,}009091 \times e^{0{,}05\times2} = 0{,}010047$$
$$0{,}009091 \times e^{0{,}05\times3} = 0{,}010562$$

L'échange des intérêts suppose la réception de 60 millions de JPY et le paiement de 0,8 million d'USD. Le taux sans risque est de 9 % par an en dollars. Par l'équation précédente, nous déduisons la valeur des trois contrats forward sous la forme :

$$(60 \times 0{,}009091 - 0{,}8) \times r^{-0{,}09*1} =- 0.2071$$
$$(60 \times 0{,}010047 - 0{,}8) \times r^{-0{,}09*2} = - 0{,}1647$$
$$(60 \text{ x } 0{,}010562 - 0{,}8) \times r^{-0{,}09*3} = - 0{,}1269$$

L'échange final du principal consiste à recevoir 1 200 millions de JPY contre le paiement de 10 millions d'USD, La valeur de ce contrat forward est :

$$(1200 \times 0{,}010562 - 10) \times e^{-0{,}09\times3} = 2.0416$$

La valeur du swap est donc -0,2071 - 0,1647 - 0,1269 + 2,0416 = 1,543 million d'USD, c'est-à-dire le résultat déjà trouvé dans l'exemple précédent.

La valeur d'un swap de devises est normalement nulle au moment où le contrat est conclu. Si les deux principaux sont strictement équivalents à la date de départ, la valeur du swap est nulle tout de suite après cette date à laquelle a lieu le premier échange de principal. Cependant, comme dans le cas des swaps de taux, cela ne signifie pas que chacun des contrats forward qui composent le swap a une valeur nulle. On peut montrer que, quand les taux sur les deux devises sont très différents, le payeur de la devise à taux plus faible est dans une position dans laquelle les contrats forward de courte maturité ont une valeur positive et ceux de maturité plus longue ont une valeur négative, en particulier le contrat correspondant à l'échange final de principal. Le payeur de la devise à taux d'intérêt plus élevé est dans une position symétrique.

Pour le payeur de la devise à taux faible, le swap aura tendance à avoir une valeur négative pendant une grande partie de sa durée de vie. En effet, dès que les premiers échanges à valeur positive ont été réalisés, les suivants ont une valeur négative, en particulier l'échange du principal. La situation est symétrique pour le payeur de la devise à taux d'intérêt élevé. Cette remarque est importante dès qu'il s'agit de prendre en compte le risque de crédit.

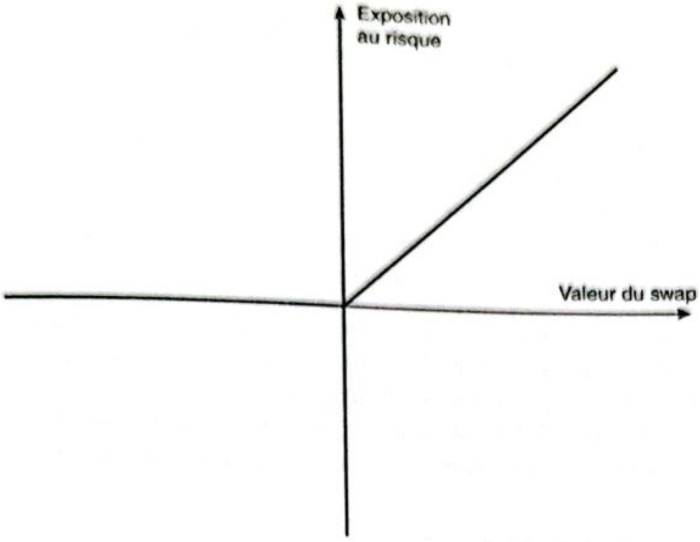
L'un des cas les plus curieux sur le marché des swaps est celui de Hammersmith et Fulham. Il montre que, au-delà des risques de marché et de crédit, les banques qui contractent des swaps peuvent aussi supporter des risques légaux.

### 3. Le risque de crédit

Les swaps sont des contrats bilatéraux entre deux entreprises ou institutions financières et, de ce fait, ne sont pas exempts de risque de crédit. Considérons une institution financière qui a conclu deux contrats de swap avec deux entreprises, de façon que sa position nette soit nulle (voir graphiques 4, 5 et 7). Si aucune des deux contreparties ne fait défaut, la position est sans risque. La baisse de valeur d'un des deux contrats est compensée par l'augmentation de valeur de l'autre. Cependant, la probabilité n'est pas nulle qu'une des deux contreparties connaisse des difficultés et fasse défaut. L'institution financière doit honorer ses engagements avec l'autre contrepartie. Supposons que, quelques mois après le début du contrat, la position de l'institution vis-à-vis de Microsoft ait une valeur positive et que Microsoft fasse défaut. L'institution est susceptible de perdre toute la valeur du contrat, alors qu'au même moment, la position vis-à-vis d'Intel a une valeur négative. Pour couvrir la position, il faudrait trouver une troisième contrepartie susceptible de « remplacer » Microsoft. Mais dans ce cas, elle devrait payer à ce remplaçant la valeur qu'avait le contrat avant le défaut de Microsoft.

Une entreprise engagée dans un swap ne supporte un risque de crédit que quand la valeur du swap est positive pour elle. Que se passe-t-il lorsque la valeur est négative et que la contrepartie connaît des difficultés ? En théorie, l'entreprise devrait faire un gain en s'affranchissant de son engagement. En pratique, la société en difficulté cherchera à revendre son contrat à un tiers de façon que la valeur positive du contrat ne soit pas perdue. Le scénario le plus réaliste, pour résumer, est que si la contrepartie fait défaut alors que le contrat a une valeur positive, l'entreprise subira une perte, mais si la valeur est négative, il n'y aura pas d'effet à cause du mécanisme de cession que nous venons d'évoquer. Le graphique suivant illustre ce point.

**Graphique 11** : Exposition au risque de crédit dans un swap.




Les pertes potentielles en cas de défaut sur un swap sont cependant bien moins importantes que celles sur un emprunt de même principal. En effet, la valeur du swap est bien inférieure à celle de l'emprunt correspondant (en particulier puisque le principal n'a pas été prêté). Les pertes potentielles sur un swap de devises sont plus importantes que celles sur un swap de taux car les principaux, dans deux devises différentes, sont échangés en fin de vie du swap.

Dans certains cas, si deux contrats se compensent pour un intermédiaire, il est possible de prédire lequel des deux a une valeur positive, comme nous l'avons vu sur le swap du graphique 10 . Les taux euro étant plus élevés que les taux US, le swap avec Intel a une valeur qui devient négative, alors que celui avec Orange a une valeur qui devient positive. Le risque de crédit se situe alors essentiellement sur cette dernière entreprise.

Dans tout contrat, il est important de distinguer le risque de crédit du risque de marché. Le risque de crédit a pour origine une probabilité de défaut non nulle de la part des contreparties. Le risque de marché vient de la possibilité que les taux de change ou d'intérêt évoluent de façon que la valeur du contrat devienne négative pour l'entreprise. Le risque de marché peut être géré, voire éliminé par d'autres contrats, alors que les risques de crédit sont moins faciles à transférer.

**Références bibliographiques**

Baz J. et M. Pascutti, « Alternative Swap Contracts Analysis and Pricing », Journal of Derivatives, hiver 1996, 7-21.

Brown K. C. et D. J. Smith, Interest Rate and Currency Swaps : A Tutorial, Association for Investment Management and Research, 1996.

Cooper I. et A. Mello, « The Default Risk in Interest Rate Swaps », Journal of Finance, 46, 2 (1991), 597-620 .

Dattatreya R. E. et K. Hotta, Advanced Interest Rate and Currency Swaps : State-of-the Art : Products, Strategies and Risk Management Applications, Irwin, Chicago, 1993.

Flavell R., Swaps and Other Instruments, Chichester, Wiley, 2002.

Gupta A. et M. G. Subrahmanyam, « An Empirical Examination of the Convexity Bias in the Pricing of Interest Rate Swaps », Journal of Financial Economics, 55, 2 (2000), 239-279

Litzenberger R. H., « Swaps, Plain and Fanciful », Journal of Finance, 47, n° 3 (1992), 831-50

Minton B. A., « An Empirical Examination of the Basic Valuation Models for Interest Rate Swaps », Journal of Financial Economics, 44, 2 (1997), 251-277 .

Sun T. S., S. Sundaresan et C. Wang, « Interest Rate Swaps : An Empirical Investigation », Journal of Financial Economics, 34, 1 (1993), 77-99.

Titman S., « Interest Rate Swaps and Corporate Financing Choices », Journal of Finance, 47, 4 (1992), 1503-1516.

Hull, J. C., 2011, Options, futures et autres actifs dérivés, 6ème edition, Pearson Canada.

Tjomb Bell , Maitriser les produits dérivés en partant de zéro, Amazone, 2015

Alain Ruttiens, 2006, Futures, swaps, Options. Les produits financiers dérivés, édipro.

Anastassiades M., Parrant P ., Les swaps, Edition ESKA, 1999.

## Série d’exercices

### Questions théoriques

- Expliquez ce qu'est un swap de taux. Quelle est la relation entre les taux de swap et les taux actuariels au pair ?
- Expliquez la différence entre risque de crédit et risque de marché sur un contrat financier.
- Expliquez dans quelle mesure un intermédiaire est exposé au risque de crédit lorsqu'il négocie des positions qui se compensent avec deux contreparties différentes.

**Exercice 1**

Les entreprises A et B se voient offrir les taux annuels suivants pour des emprunts à taux fixe et à taux variable sur 20 millions d'euros pour cinq ans.

| | Taux fixe | Taux variable |
|---|---|---|
| Entreprise A | 6% | LIBOR+10 |
| Entreprise B | 6,70% | LIBOR+40 |

L'entreprise A cherche à emprunter à taux variable et l'entreprise B à taux fixe. Construisez un swap avec un intermédiaire qui gagnera 10 points de base, de façon que le swap soit aussi attractif pour A et B.

**Exercice 2**

Un swap sur un principal de 100 millions a encore une durée de vie de 10 mois. Selon les termes du contrat, un taux LIBOR 6 mois est échangé contre un taux fixe de 6 % par an (en semestriel). Le milieu de fourchette des taux (continus) de swap offerts et demandés est identique pour toutes les maturités et vaut 5 %. Le LIBOR 6 mois était il y a deux mois à 4,8 %.
Quelle est la valeur du swap aujourd'hui pour la partie qui paie le taux variable? Quelle est sa valeur pour la partie qui paie le taux fixe?

**Exercice 3**

L'entreprise X cherche à emprunter des USD à taux fixe, alors que l'entreprise Y veut emprunter des JPY à taux fixe. Au taux de change d'aujourd'hui, le principal des emprunts est identique. Les taux qui leur sont proposés (on supposera que les différences fiscales ont déjà été intégrées) sont les suivants :

| | JPY | USD |
|---|---|---|
| Entreprise X | 3% | 4,80% |
| Entreprise Y | 3,25% | 5% |

Construisez un swap qui laissera 25 points de base de profit à l'intermédiaire. Arrangez-vous pour que ce swap soit également attractif pour X et Y, et pour que le risque de change soit uniquement supporté par l'intermédiaire.

**Exercices 4**

Un swap de devises a encore 15 mois de durée de vie. Il implique l'échange des intérêts à 7 % sur 20 millions de livres sterling (GBP) et des intérêts au taux de 5 % sur 30 millions d'USD. La structure par termes des taux est plate aux États-Unis et au Royaume-Uni. Si le swap était négocié aujourd'hui, les taux seraient respectivement 4 % en USD et 5,5 % en GBP. Tous les taux sont exprimés en composition annuelle. Le taux de change est aujourd'hui de 1,65 USD par GBP. Quelle est la valeur du swap pour la partie qui paie le GBP ? Et pour la partie qui paie l'USD ? et risque de marché sur un

**Exercices 5**

Les entreprises X et Y se voient offrir les taux annuels suivants pour des emprunts à taux fixe et à taux variable sur 5 millions d'euros à 10 ans.

| | Taux fixe | Taux variable |
|---|---|---|
| Entreprise X | 6% | LIBOR |
| Entreprise Y | 6,80% | LIBOR |

L'entreprise Y cherche à emprunter à taux fixe et l'entreprise X à taux variable. Construisez un swap dans lequel l'intermédiaire réalise un profit de 20 points de base, et qui soit également attractif pour X et Y.

**Exercice 6**

Une institution financière a conclu un swap avec une entreprise X. Selon les termes du contrat, elle reçoit 5 % par an et paie le LIBOR 6 mois sur un principal de 10 millions de dollars pour 5 ans. Les paiements sont effectués tous les 6 mois. Supposons que X fasse défaut au sixième paiement (à la fin de l'année 3) quand le taux d'intérêt (en composition semestrielle) est de 8 % par an pour toutes les maturités. Quelle est la perte pour l'institution financière ? Le LIBOR 6 mois était de 9 % au milieu de la troisième année.

**Exercice 7**

Une institution financière a contracté un swap d'une durée de 10 ans avec une entreprise Y. Selon les termes du contrat, elle reçoit 3 % par an en francs suisses (CHF) et paie 8 % d'intérêts en USD. Les paiements ont lieu une fois par an. Les principaux sont respectivement de 7 millions d'USD et de 10 millions de CHF. Supposons que Y fasse faillite à la fin de la sixième année quand le taux de change est de 0,8 USD par CHF.

Quel est le coût pour l'institution financière ? Vous supposerez qu'à la fin de l'année 6, le taux est de 3 % pour toutes les maturités en CHF et de 8 % par an pour toutes les maturités en USD. Tous les taux sont exprimés en composition annuelle.